

CIGI 2011

# Approches stochastiques pour la planification des interventions au bloc opératoire

SANA ANIBA<sup>1</sup>, AIDA JEBALI<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Unité de recherche Analyse et Commandes des Systèmes  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
ENIT, Le Belvédère, BP 37, 1002 Tunis  
[sana\\_aniba@yahoo.fr](mailto:sana_aniba@yahoo.fr), [aida.jebali@enit.rnu](mailto:aida.jebali@enit.rnu)

<sup>2</sup>Business Administration Department, Prince Sultan University  
P.O Box 53073 Riyadh 11583, Kingdom of Saudi Arabia

---

**Résumé** - Dans ce papier nous visons à construire un programme opératoire hebdomadaire avec prise en compte des phénomènes aléatoires liés à l'activité du bloc opératoire : variabilité des durées opératoires et arrivées de cas urgents. L'objectif est de fixer les interventions programmées à réaliser dans chaque salle d'opération durant chaque jour sur l'horizon d'une semaine, quand la capacité du bloc opératoire doit être partagée entre les cas programmés et les cas urgents. Pour se faire, une formulation du problème sous forme d'un modèle stochastique est tout d'abord proposée. En utilisant la technique Monte Carlo, ce dernier est approximé par un modèle déterministe : un programme linéaire mixte. La complexité du problème global nous a conduits à développer une approche heuristique dans le but de trouver une solution qui tient compte mieux de l'aléa. Le résultat trouvé montre l'importance d'aller vers des approches stochastiques dans la planification des salles opératoires.

**Abstract** - This work focuses on operating room planning when elective as well as emergency cases are considered. We propose to tackle this problem while taking into account the uncertainties related to surgical case durations and the number of emergency arrivals per day. The objective is to fix the elective cases to be achieved in each operating room during each day of the week in such a way that the overall cost incurred by this decision is minimized. A stochastic mixed integer programming model is first proposed. The latter is then approximated by a deterministic mixed integer linear program. A heuristic is then developed with the aim of taking into account more stochastic aspects. The obtained results point out the importance of using stochastic approaches in operating room planning.

**Mots clés** – Planification des salles opératoires, modélisation stochastique, approximation de Monte Carlo, heuristique.

**Keywords** - Operating room planning, stochastic programming, sample average approximation, heuristic.

---

## 1 INTRODUCTION

Depuis quelques années, le management hospitalier a commencé à mettre le bloc opératoire au centre de sa réflexion. En effet, d'un côté, le bloc opératoire représente l'un des secteurs majeurs et les plus emblématiques d'un hôpital. Il s'agit d'une pièce maîtresse du plateau technique de l'hôpital, et ce en raison de sa haute technicité [Vissers, 1998], de l'importance des ressources humaines qu'il mobilise, de l'investissement financier qu'il représente [Gordon et al., 1988 ; Macario et al., 1995], et aussi des profits qu'il peut générer pour l'établissement. D'un autre côté, le bloc opératoire représente une ressource goulot de l'hôpital puisque la majorité des processus de soins suivis par les patients hospitalisés comportent une étape chirurgicale.

Dans ce contexte, une optimisation du fonctionnement du bloc opératoire s'avère nécessaire et constitue l'une des premières préoccupations d'un établissement, notamment dans un contexte de forte demande de soins, d'une mutation vers le contrôle des dépenses de santé, et d'une amélioration de l'efficacité et de la productivité du secteur hospitalier [Jebali et al., 2006].

Le fonctionnement du bloc opératoire est déterminé par un programme opératoire qui précise les interventions à réaliser, ainsi que les différentes ressources affectées à chaque intervention. Dans ce papier, nous nous intéressons au problème de planification des interventions chirurgicales. Il s'agit d'un problème d'affectation des interventions aux salles d'opération permettant de préciser les interventions à réaliser dans chaque salle d'opération durant chaque jour de l'horizon de planification, ici la semaine.

Bien qu'il existe une littérature abondante qui s'est intéressée à ce problème [Guinet et Chaabane, 2003 ; Jebali et al., 2006 ; Roland et Riane, 2010], restent peu les travaux qui ont considéré la prise en compte des perturbations auxquelles est exposée l'activité du bloc opératoire [Cardoen et al., 2009]. En se basant sur la revue de littérature présentée dans [Cardoen et al., 2009 ; Erdogan et Denton, 2009], deux types d'incertitudes caractérisent l'activité du bloc : (1) incertitudes relatives à la variabilité des durées opératoires et (2) incertitudes relatives à l'arrivée imprévisible de cas urgents.

En effet, la connaissance précise de la durée d'une intervention donnée est essentielle pour élaborer un programme opératoire respectant à la fois les horaires du travail du personnel et les critères de productivité dans l'utilisation des salles d'opération [Junger al., 2003]. Elle constitue aussi un paramètre clé pour la bonne gestion des blocs opératoires [Marty, 2003]. En effet, le taux d'utilisation des salles d'opération varie largement en fonction de la variabilité des durées opératoires. Cependant, une estimation précise de la durée opératoire n'est pas encore une tâche facile.

En balayant la littérature, nous avons pu identifier quatre méthodes employées pour estimer les durées opératoires [Meuli, 2004] : (1) en recourant à l'historique, par interrogation des acteurs du bloc ou en faisant appel aux experts en management du bloc opératoire [Wright et al., 1996], (2) en mesurant la durée moyenne de chaque type d'intervention [Dexter et al., 2002], (3) en se fondant sur les durées opératoires d'autres hôpitaux lorsque les données existantes sont insuffisantes [Dexter, 1996 ; Macario et Dexter, 1999 ; Zhou et al., 1999], (4) en approximant les durées opératoires au moyen de lois de probabilité. Les trois premières méthodes sont utilisées dans le cas d'approches déterministes et la dernière méthode est plutôt utilisée par les approches stochastiques.

Cependant la variabilité des durées opératoires ne représente pas l'unique source d'incertitude dans la construction du programme opératoire. Une étude effectuée dans un centre hospitalier québécois a montré que les urgences constituent le type de perturbations qui cause le plus de modifications au programme opératoire [Lafton et Landry, 2001].

Lamiri a publié récemment un certain nombre de travaux où il considère le problème de la planification de l'activité chirurgicale dans les blocs opératoires en prenant en compte des aspects aléatoires : (1) la chirurgie urgente [Lamiri et Xie, 2006 ; Lamiri et al., 2008a ; Lamiri et al., 2008b ; Lamiri et al., 2009] et (2) la chirurgie urgente et la variabilité des durées opératoires de chaque cas électif [Lamiri et Xie, 2007]. Dans l'ensemble de ces travaux, il s'agissait de déterminer l'ensemble des interventions à réaliser dans chaque salle d'opération et pour chaque jour de la semaine. Les auteurs se sont fixés comme objectif, la minimisation des coûts relatifs à la réalisation de l'intervention à une date donnée, à la sur et/ou sous exploitation des salles d'opération ainsi que les coûts d'ouverture des salles opératoires. Un modèle stochastique a été proposé. Pour la résolution du problème, les auteurs ont proposé la méthode de Monte Carlo [Lamiri et al., 2008a] et des techniques d'optimisation : la génération de colonnes [Lamiri et al., 2008b], la relaxation Lagrangienne [Lamiri et Xie, 2006]. Chaque type d'aléa est incorporé directement dans le modèle mathématique via des variables aléatoires. Deux types de variables ont été ainsi considérés : (1) la durée de chaque intervention élective ; (2) le temps d'occupation d'une salle d'opération pour la réalisation des interventions urgentes arrivant durant une journée. En pratique, toutes ces variables aléatoires, doivent être déduites à partir des données relatives à l'activité du bloc opératoire. Le deuxième type de variables aléatoires incorpore et ainsi prolonge la décision d'affectation des interventions urgentes pratiquée au bloc, qui n'est pas nécessairement faite selon des règles claires et bien étudiées. Dans [Min et Yih, 2010], les auteurs considèrent le problème de planification des interventions à court terme. Ils affectent à chaque patient en fin de consultation médicale une priorité qui reflète son état de gravité : patient très urgent, urgent ou électif. La planification des interventions se fait moyennant

ces priorités. Le but de cet article est d'élaborer un planning qui prend en considération les priorités des patients et l'incertitude liée à la demande et à la durée des chirurgies de différentes catégories. Ce problème est modélisé sous forme d'un programme stochastique dynamique.

D'autres auteurs ont considéré le problème d'ordonnement des interventions chirurgicales avec prise en compte des aléas [Denton et al., 2007 ; Arnaout et Kulbashian, 2008].

Ce travail constitue une extension de nos travaux antérieurs présentés dans [Jebali et Aniba, 2011] où une approche stochastique a été développée afin de permettre une planification des interventions tenant en compte l'aléa relatif à la durée des interventions programmées. Via la simulation, les différents plannings construits ont été évalués. Grâce à cette évaluation, nous avons pu pointer sur l'importance de la prise en compte de ce type d'aléas lors de la planification des interventions.

Ici nous proposons une planification des interventions avec prise en compte de deux types d'aléas : (1) variabilité des durées opératoires ; (2) arrivée des interventions urgentes. Par rapport aux travaux antérieurs, nous considérons ici deux aspects aléatoires caractéristiques des interventions urgentes : arrivée et durée. A travers ce travail, nous essayerons de montrer que la prise en compte de l'aléa est incontournable dans la construction du programme opératoire.

La non prise en compte des aléas dans la planification peut engendrer : un non respect des capacités horaires (des dépassements horaires qui génèrent des pertes de coût importantes à l'hôpital), des temps d'attente énormes pour les deux classes de patients (électifs et urgents) et parfois même une annulation/report des interventions déjà planifiées.

La suite de ce papier est organisée de la manière suivante : la section 2 expose l'approche que nous proposons afin de procéder à l'affectation des interventions chirurgicales aux salles d'opération avec prise en compte des aléas. Ensuite, la section 3 est dédiée aux formulations mathématiques. Nous avons modélisé le problème traité par un modèle stochastique que nous avons approximé par un modèle déterministe intégrant les phénomènes incertains via la méthode de « *Sample Average Approximation* ». Les expérimentations conduites sur le modèle mathématique ainsi que les résultats obtenus sont mentionnées dans la section 4. Dans la section 5, nous proposons une approche heuristique basée sur la décomposition temporelle en vue de trouver une solution en renforçant plus la prise en compte de l'aléa. Les expérimentations et résultats obtenus sont présentés dans la section 6. Dans la conclusion, quelques perspectives de recherches relatives à ce travail sont discutées.

## 2 PROBLEMATIQUE ET APPROCHE PROPOSEE

Ce travail ne vise que le niveau de décision opérationnel. En effet, l'une des questions qui se posent à ce niveau concerne l'approche de planification à adopter au bloc opératoire. Le but de notre travail est de proposer une approche de planification stochastique des interventions du bloc opératoire et de mettre en évidence son apport par rapport à une approche déterministe. Le terme stochastique provient bien évidemment du fait que dans la modélisation mathématique nous prenons en compte quelques incertitudes liées à l'activité du bloc opératoire via des variables aléatoires.

Pour traiter ce problème, nous avons procédé aux étapes suivantes :

- (1) nous avons développé un modèle d'optimisation stochastique ; (2) nous avons approximé le modèle stochastique par un modèle déterministe.
- (3) nous avons proposé une approche heuristique afin de pouvoir déterminer un programme opératoire en prenant en compte plus d'aléas. Les performances des programmes opératoires obtenus en recourant à une approche stochastique seront comparées à celles obtenues par une approche déterministe.

Les hypothèses suivantes ont été prises en considération lors de la formulation du problème de planification des interventions :

- Une stratégie de programmation ouverte est utilisée ;
- Mises à part les salles opératoires, toutes les autres ressources nécessaires à la réalisation de l'intervention chirurgicale sont disponibles ;
- Toutes les salles d'opération sont multifonctionnelles ;
- Une date d'hospitalisation est communiquée auparavant à chaque patient (dès qu'il s'avère nécessaire pour lui de faire l'intervention chirurgicale). L'intervention est alors prévue pour le jour juste après le jour de son hospitalisation. Au début de chaque horizon de décision, nous avons ainsi une liste des cas électifs concernés par la planification ;
- Il y'a possibilité de report des cas électifs ;
- Un cas urgent doit être opéré le jour même de son arrivée ;
- Le nombre d'arrivées de cas urgents durant les heures régulières d'ouverture du bloc opératoire suit une loi de Poisson [Sobolev et Kuramoto, 2007] ; en plus nous supposons qu'elle est tronquée ;
- La durée d'occupation (durée opératoire) d'une salle d'opération pour la réalisation d'une intervention suit une loi log-normale [Zhou et Dexter, 1998 ; Strum et al., 2000 ; Lamiri et Xie, 2007].

### 3 FORMULATION MATHÉMATIQUE

Dans ce papier, nous considérons la planification des cas programmés sur un horizon de  $H$  jours (les 5 jours ouvrables de la semaine). Le bloc opératoire est composé de  $S$  salles d'opération identiques.  $N$  est le nombre de cas à opérer. La durée opératoire de chaque cas  $n$  est considérée comme une variable aléatoire de fonction de densité  $f_n(x)$ , de moyenne  $\mu_n$  et d'écart type  $\sigma_n$ .

Soit  $N_1$  le nombre de cas programmés qui peuvent être opérés dans les salles d'opération sur l'horizon de planification considéré. Chaque cas programmé  $i$  ( $i=1..N_1$ ) est caractérisé par :

- $r_i$  : date d'hospitalisation du cas  $i$  ;
- $d_i$  : date limite avant laquelle doit prendre lieu l'intervention du cas programmé  $i$  ;
- $dur_i$  : durée d'occupation de la salle d'opération par le cas programmé  $i$ . Elle englobe la durée chirurgicale, la durée de préparation et la durée de nettoyage de la salle.

Soit  $N_2$  le nombre de cas urgents pouvant arriver sur l'horizon de planification. Chaque cas urgent  $k$  ( $k=N_1+1..N_1+N_2$ ) est spécifié par :

- $Z_{kj}$  : variable binaire qui prend la valeur 1 si le cas urgent  $k$  arrive le jour  $j$ , 0 sinon. La somme sur  $k$  des  $Z_{kj}$  représente le nombre d'arrivées de cas urgents durant le jour  $j$  et suit une loi de poisson.
- $dur_k$  : durée d'opération du cas urgent  $k$ .

Le problème de planification des interventions est modélisé sous forme d'un modèle stochastique (Ps).

### 3.1 Notations

$H$	Horizon de planification
$j$	Indice relatif à une période de l'horizon $j, j=1..H$
$N$	Nombre des cas à planifier
$n$	Indice relatif à l'intervention $n, n=1..N$
$N_1$	Nombre des cas électifs
$i$	Indice relatif à l'intervention d'un cas électif $i, i=1..N_1$
$N_2$	Nombre maximal de cas urgents susceptibles d'arriver. Il représente le cardinal de $[N_1+1..N]$ ( $N=N_1+N_2$ )
$k$	Indice relatif à une intervention urgente $k, k=N_1+1..N$
$S$	Nombre des salles d'opération
$s$	Indice relatif à la salle d'opération $s, s=1..S$
$r_i$	Date d'hospitalisation du cas programmé $i$ ,
$d_i$	Date limite de l'intervention du cas programmé $i$ ,
$dur_i$	Durée de réalisation d'une intervention programmée $i$ (minutes) ;
$dur_k$	Durée de réalisation d'une intervention urgente $k$ (minutes)
$Z_{kj}$	= 1 si le cas $k$ urgent arrive le jour $j$ , 0 sinon.
$HN_{sj}$	Durée régulière d'ouverture de la salle opératoire $s$ durant le jour $j$ (minutes) ;
$HS_{sj}$	Durée supplémentaire d'ouverture de la salle opératoire $s$ durant le jour $j$ (minutes) ;
$Ch$	Coût d'un jour d'hospitalisation (euros) ;
$Co_{sj}$	Coût d'ouverture de la salle $s$ durant le jour $j$ pendant les heures supplémentaires (euros/minute) ;
$Cu_{sj}$	Coût de sous-utilisation de la salle opératoire $s$ durant le jour $j$ pendant les heures régulières (euros/minute).

La solution cherchée est décrite moyennant les variables binaires :

$X_{nsj}$  = 1 si l'intervention du patient  $n$  est affectée à la salle d'opération  $s$  le jour  $j$ , 0 sinon.

Les variables aléatoires intermédiaires :

$\xi_{sj}$  Durée totale d'utilisation de la salle opératoire  $s$  le jour  $j$  (minutes) ;  
 $\alpha_{sj}$  Durée de sur-utilisation de la salle  $s$  le jour  $j$  (minutes) ;  
 $\beta_{sj}$  Durée de sous-utilisation de la salle  $s$  le jour  $j$  (minutes).

### 3.2 Modèle stochastique (Ps)

$$\text{Min} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H (Co_{sj} \cdot \alpha_{sj} + Cu_{sj} \cdot \beta_{sj}) + \sum_{i=1}^{N_1} Ch \cdot \left( \left( \sum_{s=1}^S \sum_{j=r_i+1}^H j \cdot X_{isj} - (r_i + 1) \right) + \left( \left( 1 - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H X_{isj} \right) \cdot d_i \right) \right) \quad [1]$$

Sous contraintes :

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H X_{isj} \leq 1 \quad \forall i \in [1..N_1] \quad [2]$$

$$X_{isj} = 0 \quad \forall i \in [1..N_1], \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] / j \leq r_i \quad [3]$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=r_i+1}^H j \cdot X_{isj} \leq d_i \quad \forall i \in [1..N_1] \quad [4]$$

$$\sum_{s=1}^S X_{ksj} = Z_{kj} \quad \forall k \in [N_1+1..N], \forall j \in [1..H] \quad [5]$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} X_{isj} \cdot dur_i + \sum_{k=N_1+1}^N X_{ksj} \cdot dur_k = \xi_{sj} \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [6]$$

$$\xi_{sj} \leq HN_{sj} + HS_{sj} \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [7]$$

$$\alpha_{sj} = E \left[ \left( \xi_{sj} - HN_{sj} \right)^+ \right] \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [8]$$

$$\beta_{sj} = E \left[ \left( \xi_{sj} - HN_{sj} \right)^- \right] \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [9]$$

$$X_{nsj} \in \{0,1\} \quad \forall n \in [1..N], \forall s \in [1..S] \quad [10]$$

$$, \forall j \in [1..H]$$

$E[.]$  est l'espérance mathématique de la variable aléatoire en question.  $(x)^+ = \max\{0, x\}$  et  $(x)^- = \max\{0, -x\}$ .

La fonction objective [1] minimise les coûts moyens de sur-utilisation et de sous-utilisation des salles d'opération ainsi que les coûts d'attente et de report de cas devant être programmés sur l'horizon de planification. Les contraintes [2] assurent qu'une intervention ne peut être affectée qu'à une seule salle d'opération sur l'horizon de  $H$  jours. Les contraintes [3] garantissent qu'aucun patient programmé ne peut être opéré avant ou le jour même de son hospitalisation. La famille de contraintes [4] impose le respect de la date limite des interventions programmées. Les contraintes [5] assurent que chaque cas urgent arrivant le jour  $j$  doit être opéré le jour même. Les contraintes [6] permettent de calculer la durée d'occupation de la salle d'opération  $s$  le jour  $j$ . La famille de contraintes [7] permet de respecter les temps d'ouverture des salles d'opération. Une salle d'opération ne peut pas être ouverte au-delà des heures régulières et des heures supplémentaires permises par la législation. Les contraintes [8] et [9] sont réservées au calcul des espérances mathématiques respectivement de la sur-utilisation et de la sous-utilisation des salles d'opération. Les contraintes [10] sont des contraintes d'intégrités.

Le problème de planification des interventions est un problème combinatoire stochastique NP-difficile [Lamiri et al., 2008a]. Dans ce papier, nous présentons une approche de résolution basée sur une technique Monte Carlo : le *Sample Average Approximation*.

### 3.3 Modèle déterministe approximée (Pa)

Afin de résoudre le modèle stochastique de planification des interventions, nous faisons appel à l'une des techniques Monte Carlo les plus simples et les plus utilisées [Higle et Sen, 1991 ; Shapiro, 2001 ; Ruszczyński et Shapiro, 2003] : le *Sample Average Approximation*. Cette technique nous permettra d'avoir un modèle déterministe (Pa) approximant le modèle stochastique (Ps).

L'idée de base de cette méthode est très simple. Elle consiste à approcher les intégrales (utilisées pour le calcul des espérances mathématiques) par des moyennes empiriques. Les variables aléatoires sont générées et intégrées dans le modèle. Soit  $L$  le nombre d'instances considérées. Par la loi des grands nombres, nous pouvons approximer les valeurs de sur-utilisation et sous-utilisation des salles d'opération (contraintes 8 et 9) du modèle stochastique (Ps) par leurs valeurs moyennes si  $L$  prend de grandes valeurs. Dans ce cas, les variables intermédiaires  $\alpha_{sj}$  et  $\beta_{sj}$  sont respectivement remplacées par les valeurs approximées  $\alpha_{sj}^L$  et  $\beta_{sj}^L$ :

$$\alpha_{sj}^L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\xi_{sj}^l - HN_{sj})^+$$

$$\beta_{sj}^L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\xi_{sj}^l - HN_{sj})^-$$

Ainsi, le modèle stochastique précédent (Ps) peut être approximé par le modèle mathématique (Pa), présenté ci-après.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H (Co_{sj} \cdot \alpha_{sj}^L + Cu_{sj} \cdot \beta_{sj}^L) \\ & + \sum_{i=1}^{N_1} Ch. \left( \left( \sum_{s=1}^S \sum_{j=r_i+1}^H j \cdot X_{isj} - (r_i + 1) \right) + \left( \left( 1 - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H X_{isj} \right) \cdot d_i \right) \right) \end{aligned} \quad [11]$$

Sous contraintes :

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H X_{isj} \leq 1 \quad \forall i \in [1..N_1] \quad [2]$$

$$X_{isj} = 0 \quad \forall i \in [1..N_1], \forall s \in [1..S] \quad [3]$$

$$, \forall j \in [1..H] / j \leq r_i$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=r_i+1}^H j \cdot X_{isj} \leq d_i \quad \forall i \in [1..N_1] \quad [4]$$

$$\sum_{s=1}^S X_{ksj}^l = Z_{kj}^l \quad \forall k \in [N_1 + 1..N], \quad [12]$$

$$\forall j \in [1..H], \forall l \in [1..L]$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} X_{isj} \cdot dur_i^l + \sum_{k=N_1+1}^N X_{ksj} \cdot dur_k^l = \xi_s^l \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [13]$$

$$, \forall l \in [1..L]$$

$$\xi_{sj}^l \leq HN_{sj} + HS_{sj} \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [14]$$

$$\alpha_{sj}^L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\xi_{sj}^l - HN_{sj})^+ \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [15]$$

$$\beta_{sj}^L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\xi_{sj}^l - HN_{sj})^- \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [16]$$

$$\alpha_{sj}^L, \beta_{sj}^L \geq 0 \quad \forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H] \quad [17]$$

$$X_{isj}, X_{ksj}^l \in \{0,1\} \quad \forall i \in [1..N_1], \quad [18]$$

$$\forall k \in [N_1 + 1..N],$$

$$\forall s \in [1..S], \forall j \in [1..H],$$

$$\forall l \in [1..L]$$

Les contraintes de [12] à [16] possèdent le même principe que les contraintes de [5] à [9] dans le modèle (Ps), seulement, la notion d'instance a été intégrée pour remplacer les variables aléatoires. Les contraintes [12] s'assurent que chaque chirurgie urgente  $k$  arrivant le jour  $j$  selon l'instance  $l$  est affectée directement à une salle d'opération  $s$  le jour même de son arrivée. La famille de contraintes [13] définit la durée d'occupation de la salle  $s$  le jour  $j$ . Les contraintes [14] garantissent que dans chaque instance  $l$ , la durée d'occupation de la salle d'opération respecte la capacité permise. Les autres contraintes sont les mêmes que celles employées dans la formulation du programme stochastique (Ps).

La solution optimale du problème déterministe approximé (Pa) converge vers la solution optimale du modèle stochastique (Ps) lorsque  $L$ , le nombre d'instances prend de grandes valeurs [Lamiri et al., 2008a ; Shapiro et al., 2009]. Le modèle déterministe résultant peut facilement être transformé en un programme linéaire en nombres mixtes. Simplement, le modèle déterministe est aussi NP-difficile.

## 4 EXPERIMENTATIONS DU MODELE (PA) & RESULTATS NUMERIQUES

Toutes les expérimentations conduites dans ce travail utilisent l'outil ILOG OPL 6.3 avec le solveur CPLEX version 12.1 sur une machine HP G62, de processeur Intel® Core™ i3 M330 2.13 GHz et de 3 Go de mémoire vive.

Nous considérons le cas d'un bloc opératoire composé de 3 salles d'opération. La durée d'ouverture de chaque salle d'opération, en heures régulières, est de 480 minutes et, en heures supplémentaires, est limitée à 240 minutes. Le coût d'un jour d'hospitalisation est de 350 € [Guinet et Chaabane, 2003 ; Jebali et al., 2006 ; Lamiri et al., 2008b]. Le coût d'une minute de sous-utilisation du bloc opératoire, en heures régulières est de 4.76 €. Le coût d'une minute de sur-utilisation du bloc opératoire en faisant appel aux heures supplémentaires est de 8.33 € [Lamiri et al., 2008b].

### 4.1 Données

50 cas programmés sont considérés. Pour générer les durées d'opération des cas programmés, la distribution log-normale est utilisée [Lamiri et Xie, 2007]. Pour chaque cas programmé  $i$ ,  $\mu_i$  est générée aléatoirement et uniformément dans l'intervalle [30 minutes, 180 minutes] ;  $\sigma_i$  est générée aléatoirement et uniformément dans l'intervalle [3 minutes, 90 minutes] [Lamiri et Xie, 2007]. Les dates d'hospitalisation  $r_i$  sont générées uniformément et aléatoirement dans l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4} [Jebali et Bouchriha, 2007]. Les dates limites  $d_i$  sont générées aléatoirement dans l'ensemble {15, 16, 17, 18, 19, 20}. Les durées des interventions urgentes  $k$  sont générées suivant la distribution log-normale de moyenne 120 minutes ;  $\sigma_k$  est générée aléatoirement et uniformément dans l'intervalle [3 minutes, 90 minutes] [Lamiri et Xie, 2007].

Dans [Sobolev et Kuramoto, 2007], les auteurs ont étudié l'arrivée des demandes au bloc opératoire, et ce en se basant sur un historique de dix ans. Ils ont annoncé que les demandes arrivent au bloc opératoire suivant une loi de Poisson de paramètres 1 pour des patients de priorités élevées, 5 pour des patients de priorités moyennes et 3 pour des patients de priorités minimales. Dans ce travail, nous supposons qu'en moyenne 1 cas urgent arrive par jour et par instance durant les heures régulières du bloc opératoire. En plus, nous considérons que le nombre d'arrivées de cas urgents par jour est limité à 7 (ce qui correspond à une probabilité cumulée supérieure à 0.99).

Pour générer le nombre d'arrivées de cas urgents par jour, nous avons procédé suivant le pseudo-algorithme présenté dans l'encadré 1.

**Etape 1.** Pour chaque jour  $j \in [1..H]$  et pour chaque instance  $l \in [1..L]$  générer aléatoirement  $R_j^l$  un nombre uniformément distribué entre 0 et 1 ;

**Etape 2.** Utiliser la table de la loi de Poisson de paramètre 1, pour déterminer le nombre d'arrivée(s)  $U_j^l$  correspondant à la probabilité  $R_j^l$  ;

**Etape 3.** Répéter  $\forall j \in [1..H]$  et  $\forall l \in [1..L]$

Si  $U_j^l \neq 0$

$$Z_{kj}^l = 1 \text{ pour } k \in [N_1 + 1 + (7 \cdot (j-1))..N_1 + (7 \cdot (j-1)) + U_j^l]$$

$$Z_{kj}^l = 0 \text{ pour } k \in [N_1 + 1 + (7 \cdot (j-1)) + U_j^l..N_1 + (7 \cdot j)]$$

Sinon

$$Z_{kj}^l = 0 \text{ pour } k \in [N_1 + 1 + (7 \cdot (j-1))..N_1 + (7 \cdot j)]$$

### Encadré 1. Pseudo-algorithme de génération du nombre de cas urgents

### 4.2 Résultats numériques

En utilisant les paramètres par défaut de l'OPL/CPLEX, la résolution du programme linéaire en nombres mixtes s'est limitée au cas où 8 instances ( $L=8$ ) sont considérées.

Avec 8 instances, nous ne pouvons pas cependant détecter la convergence de la solution obtenue (8 n'est pas un grand nombre). En effet, dans [Lamiri et al., 2008a], les auteurs ont noté que la convergence du modèle obtenu par « *Sampling Average Approximation Method* » n'était possible qu'à partir d'un nombre d'instances supérieur à 20. En ce sens, nous avons pensé, dans un premier temps, à changer les paramètres par défaut de l'OPL/CPLEX et ce en procédant comme suit : (1) augmenter la mémoire de résolution ; (2) autoriser une génération agressive des coupes [Paquet et al., 2007].

Avec ces nouveaux paramètres, nous avons pu résoudre le modèle avec un nombre d'instances atteignant 30. Quatre plannings opératoires ont été déterminés via la résolution du problème (Pa) pour quatre valeurs de  $L \in \{1, 8, 15, 30\}$ .  $L$  est le nombre d'instances considérées dans le modèle. Le planning opératoire déterminé en considérant  $L=1$  reflète l'approche déterministe. Mise à part le fait de considérer une seule instance ( $L=1$ ), nous considérons qu'il n'y a aucun cas urgent arrivant au bloc et que la durée opératoire d'une intervention chirurgicale (cas programmé) est égale à sa valeur moyenne.

Le tableau 1 expose les résultats obtenus pour le modèle (Pa). Pour chaque problème traité, référé par un numéro (N), nous donnons : le nombre d'instances considérées (L) ; le nombre de contraintes (Nb. Cts.) ; le nombre de variables (Nb. Var.) ; le nombre d'interventions non affectées sur l'horizon de planification (Nb. NP) ; la valeur de la fonction objectif en euros (Z) ; le coût d'utilisation des salles d'opération (coût de sur et sous-utilisation) en euros (CU) et le temps de calcul en secondes de la solution d'affectation des interventions aux salles d'opération (CPU).

**Tableau 1. Résultats expérimentaux du problème complet**

N	L	Nb. Cts.	Nb. Var.	Nb. NP	CPU	Z	CU
1	1	484	856	0	1,12	9182,04	9182,04
2	8	2514	5791	1	29067,01	11436,10	7586,10
3	15	4369	10201	0	873,46	7798,22	7798,22
4	30	8344	19651	0	7593,1	7796,79*	7796,79

\* La meilleure solution trouvée pour le modèle complet (peut ne pas être la solution optimale) après le temps de compilation indiqué

En comparant les résultats de l'approche déterministe (problème N°1,  $L=1$ ) et ceux de l'approche stochastique  $L \in \{8, 15, 30\}$ , nous pouvons voir que l'approche stochastique donne de meilleurs résultats. En effet, l'approche déterministe donne un planning avec un coût total égal à 9182,04 €. L'approche stochastique permet d'obtenir des plannings ayant de meilleurs coûts d'utilisation. Avec 8 instances, la valeur de la fonction objectif est de 11436,101 € à cause du fait qu'il y a un cas parmi les 50 qui n'a pas été programmé sur la semaine. Mais de point de vue coût d'utilisation, la solution trouvée pour le problème N°2 est meilleure que celle trouvée par l'approche déterministe.

De point de vue temps de calcul, il est évident que l'approche stochastique en est plus consommatrice ; il croît avec le nombre d'instances intégré dans le modèle. Cependant, plus le nombre d'instances considéré est grand, plus la solution trouvée est de meilleure qualité. Nous soulignons ici que la solution trouvée en considérant 30 instances, bien qu'elle ne soit pas optimale, elle est meilleure que les solutions

optimales trouvées en considérant un nombre d'instances inférieur.

Ainsi, nous pensons qu'il sera pertinent à ce niveau de développer une approche heuristique afin de pouvoir prendre en compte un plus grand nombre d'instances dans la résolution.

## 5 APPROCHE HEURISTIQUE BASEE SUR LA DECOMPOSITION TEMPORELLE

Après l'expérimentation du modèle (Pa), nous avons pu mettre en évidence la complexité du problème de planification stochastique. Ce résultat se joint à celui déjà annoncé dans les travaux de [Lamiri et al., 2008a]. Mais aussi nous avons pu remarquer qu'il sera intéressant d'aller vers la construction de solution heuristique se basant sur un nombre d'instances plus important (supérieur par exemple à 30, 100) que de se suffire d'une solution optimale du problème avec un nombre d'instances réduit (inférieur à 20-30).

En effet, plus le nombre d'instances considéré dans le modèle obtenu par « *Sample Average Approximation* » est grand, plus la convergence vers la solution optimale du programme stochastique « réel » est garantie [King et Wets, 1989 ; Shapiro et al., 2009].

Pour aboutir à une approximation du problème (Ps), intégrant un plus grand nombre d'instances, nous avons essayé de développer une approche heuristique basée sur le principe de décomposition temporelle. Cette approche construit un planning hebdomadaire d'une façon séquentielle, de jour en jour. Pour cela, elle utilise des programmes linéaires mixtes approximant les problèmes stochastiques de planification des interventions posés pour chaque jour de l'horizon. Bien évidemment, ces programmes linéaires mixtes ont été obtenus par la méthode d'approximation « *Sample Average Approximation* » et prennent en compte les mêmes hypothèses que le problème global (utilisant le modèle (Ps) multi-périodique).

### 5.1 Notations

Durant la construction du planning du jour  $j$ , nous considérons les variables de décision entières suivantes :

$X_{is}$  = 1 si le cas programmé  $i$  est affecté à la salle d'opération  $s$ , 0 sinon.

$X_{ks}^l$  = 1 si le cas urgent  $k$  généré selon l'instance  $l$  est affectée à la salle d'opération  $s$ , 0 sinon.

L'heuristique fera également appel aux ensembles suivants :

$\Omega$  L'ensemble des cas programmés à considérer sur l'horizon de  $H$  jours tel que  $\Omega = \{1, \dots, N_1\}$ ;

$N_{1j}$  L'ensemble des cas programmés à considérer dans le planning du jour  $j$  tel que  $N_{11} = \{i \in \Omega / r_i = 0\}$  et  $N_{1j} = \{i \in \Omega / r_i = j-1\} \cup \Omega_{(j-1)}, \forall j \geq 2$ ;

$\Omega_{1j}$  L'ensemble des interventions non planifiées le jour  $j$  pour des raisons de retard, d'annulation ou de report tel que  $\Omega_{1j} = \{i \in N_{1j} / X_{is} = 0\}$ .

$K_j$  L'ensemble  $[N_{1j}+1+7.(j-1)..N_{1j}+(7.j)]$ , il s'agit des indices relatifs aux cas urgents arrivant le jour  $j$

### 5.2 Algorithme de l'heuristique

L'approche heuristique repose sur l'idée de décomposer le problème global qui est multi-périodique en  $H$  problèmes mono-périodiques. La solution du problème global sera obtenue en confectionnant les  $H$  solutions trouvées.

Pour trouver le planning d'un jour  $j$  de la semaine, uniquement les patients dont la date d'hospitalisation est inférieure au jour  $j$  et non encore planifiés sont considérés. Au dernier jour de l'horizon, nous pénalisons les cas non planifiés en supposant que leur date d'intervention sera égale à sa date limite.

L'algorithme de l'heuristique proposée est représenté dans l'organigramme de la figure 1.

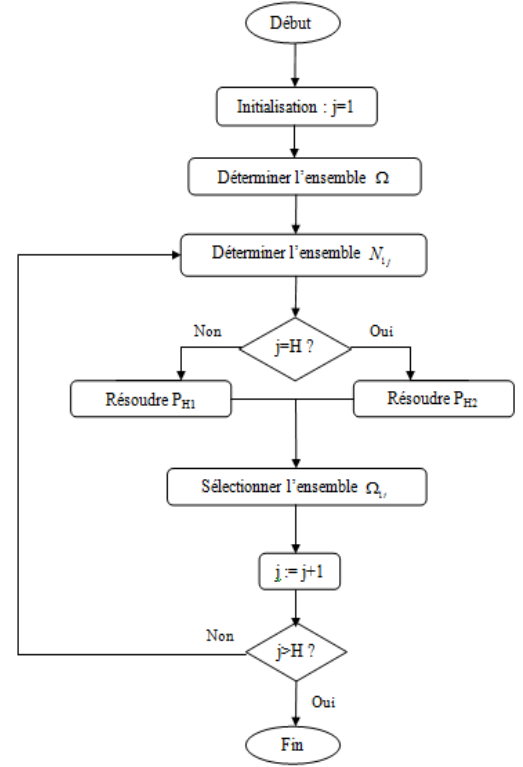


Figure 1. Algorithme de l'heuristique de décomposition temporelle

### 5.3 Modèle de planification des interventions durant un jour $j=1..H-1: (P_{H1})$

$$CT = \text{Min} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H (Co_{sj} \cdot \alpha_{sj}^L + Cu_{sj} \cdot \beta_{sj}^L) + \sum_{i=1}^{N_{1j}} Ch \cdot \left(1 - \sum_{s=1}^S X_{is}\right) \quad [19]$$

Sous contraintes :

$$\sum_{s=1}^S X_{is} \leq 1 \quad \forall i \in [1..N_{1j}] \quad [20]$$

$$\sum_{s=1}^S X_{ks}^l = Z_k^l \quad \forall k \in K_j, \forall l \in [1..L] \quad [21]$$

$$\sum_{i=1}^{N_{1j}} X_{is} \cdot dur_i^l + \sum_{k \in K_j} X_{ks}^l \cdot dur_k^l = \xi_s^l \quad \forall s \in [1..S], \forall l \in [1..L] \quad [22]$$

$$\xi_s^l \leq HN_s + HS_s \quad \forall s \in [1..S], \forall l \in [1..L] \quad [23]$$

$$\alpha_s^L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\xi_s^l - HN_s)^+ \quad \forall s \in [1..S] \quad [24]$$

$$\beta_{sj}^L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\xi_{sj}^l - HN_{sj})^- \quad \forall s \in [1..S] \quad [25]$$

$$\alpha_s^L, \beta_s^L \geq 0 \quad \forall s \in [1..S] \quad [26]$$

$$X_{is}, X_{ks}^l \in \{0,1\} \quad \forall i \in [1..N_i], \forall s \in [1..S] \quad [27]$$

$$, \forall k \in K_j, \forall l \in [1..L]$$

La fonction objectif [19] minimise le coût d'occupation des salles d'opération ainsi que le coût de non planification des interventions programmées durant le jour de planification considéré. Les autres contraintes sont les mêmes que dans le modèle (Pa).

### 5.3 Modèle de planification des interventions durant le jour

$j=H: (P_{H2})$

$$CT = \text{Min} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^H (Co_{sj} \cdot \alpha_{sj}^L + Cu_{sj} \cdot \beta_{sj}^L) + \sum_{i=1}^{N_{is}} Ch_i \cdot \left( (d_i - H) \cdot \left( 1 - \sum_{s=1}^S X_{is} \right) \right) \quad [28]$$

Ce programme admet les mêmes contraintes (de [20] à [27]) que le programme (P<sub>H1</sub>).

Nous cherchons à minimiser le coût relatif à l'utilisation des salles d'opération. Au jour  $H$  toutes les interventions considérées doivent être planifiées. Toute intervention non programmée sera pénalisée en supposant que le patient  $i$  pourrait être opéré à la date limite  $d_i$ .

## 6 EXPERIMENTATIONS DE L'HEURISTIQUE & RESULTATS NUMERIQUES

L'approche heuristique utilise les mêmes données et le même outil informatique que celui utilisé lors de la résolution du modèle (Pa).

En adoptant les paramètres par défauts de l'OPL/CPLEX pour la résolution des deux programmes (P<sub>H1</sub>) et (P<sub>H2</sub>) utilisés par l'heuristique, nous avons noté qu'au plus 90 instances ont pu être considérées par l'approche heuristique. Cet échantillonnage dépasse en fait la limite du programme (Pa) où uniquement 30 instances ont pu être considérées. Cependant en essayant de modifier les paramètres d'OPL/CPLEX (comme dans le modèle multi-périodique) nous avons pu considérer un nombre d'instances plus grand : nous avons pu obtenir un planning en considérant 300 instances.

Quatre plannings opératoires sont construits en recourant à l'heuristique proposée. Ils ont été déterminés via la résolution des deux problèmes (P<sub>H1</sub>) et (P<sub>H2</sub>) pour quatre valeurs de  $L \in \{90, 100, 200, 300\}$ . Nous adoptons les mêmes abréviations que celles employées dans le paragraphe précédent dans la présentation des résultats.

Le tableau 2 rapporte les résultats des plannings hebdomadaires construits par l'heuristique. D'après les résultats trouvés, nous remarquons que plus on augmente le nombre d'instances, plus il y a des cas programmés qui ne sont pas planifiés.

**Tableau 2. Résultats de l'approche heuristique sur l'horizon  $H$**

N°	L	Nb. NP	CPU	Z	CU
1	90	0	4734,73	8345,57	8345,57
2	100	0	6474,43	8849,25*	8849,25
3	200	1	10486,3	11980,46*	8480,46
4	300	1	70509,77	12157,46*	8657,46

\* La solution trouvée pour l'approche heuristique après le temps de compilation indiqué

Pour  $L=200$  et  $300$ , un cas électif n'a pas pu être planifié sur la semaine.

Les résultats obtenus par la méthode heuristique dans le cadre d'une approche stochastique sont meilleurs que ceux proposés par l'approche déterministe.

Par rapport aux résultats obtenus pour le modèle (Pa), une expérimentation plus large doit être conduite afin de mettre en évidence les avantages que présente la solution proposée par la méthode heuristique notamment de point de vue robustesse et convergence. Plus précisément, nous pensons ici à l'évaluation des programmes construits via la simulation par la considération d'un nombre d'instances plus grand (supérieur à 1000).

L'heuristique cependant est consommatrice de temps de calcul du fait de la prise en compte d'un grand nombre d'instances. Ce temps se multiplie avec le nombre d'instances considéré. Il faut alors penser à développer des méthodes de résolution robustes et moins consommatrices de temps de calcul.

## 7 CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons formulé le problème de planification des interventions sous forme d'un programme stochastique. Afin de résoudre ce problème, nous avons opté pour l'une des techniques de Monte Carlo : le « *Sample Average Approximation* », nous avons pu ainsi approximer le modèle stochastique par un programme linéaire en nombres mixtes. Les expérimentations ont mis le doigt sur la complexité de ce modèle et le besoin de recourir à des méthodes heuristiques.

Pour avoir une meilleure approximation du problème initial, nous avons mis en place une approche heuristique se basant sur le principe de décomposition temporelle. Après expérimentation sur le solveur CPLEX nous avons pu atteindre un nombre d'instances très élevé par rapport au problème initial.

Nous avons pu noter que les solutions générées aussi bien par le modèle (Pa) que par l'heuristique sont meilleures que la solution proposée par l'approche déterministe. Ce résultat sera confirmé par le recours à la simulation pour une évaluation plus approfondie des performances du bloc opératoire en fonction de la méthode/approche de planification utilisée. C'est l'une des perspectives directes de ce travail et qui est déjà entamée.

Par ailleurs, ce travail ouvre la voie à notre sens, à d'autres perspectives de recherche. Nous citons quelques idées à titre d'exemple : étendre le modèle de planification pour tenir compte d'autres contraintes liées aux pratiques du terrain, prendre en compte d'autres ressources en aval et en amont des salles d'opération, améliorer les performances de la méthode de résolution, développer des méta-heuristiques réputées pour la résolution de ce type de problèmes, etc.

## 8 REFERENCES

- Arnaut, J.P.M., Kulbashian S., (2008) Maximization the utilization of operating rooms with stochastic times using simulation. Proceeding of the 2008 Winter Simulation Conference.
- Cardoen, B., Demeulemeester, E., Belien J., (2009) Operating room planning and scheduling: a literature review. *European Journal of Operational Research* (2009), doi: 10.1016/j.ejor.2009.04.011.
- Dexter, F., (1996) Application of prediction levels to operating room scheduling. *AORN J*, 63, 3, pp. 607-15.
- Dexter, F., Traub, R.D., Fleisher, L.A., Rock, P., (2002) What sample sizes are required for pooling surgical case durations among facilities to decrease the incidence of procedures with little historical data? *Anesthesiology*, 96, 15, pp. 1230-36.
- Denton, B., Viapiano, J., Vogl, A., (2007) Optimization of surgery sequencing and scheduling decisions under uncertainty. *Health Care Management Science*, 10, pp. 13-24.
- Erdogan, S.A., Denton, B.T., (2009) Surgery Planning and Scheduling : A Literature Review. To be submitted to *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*.
- Gordon, T., Lyles, A., Fountain, J., (1988) Surgical unit time review : ressource utilization and management implications. *Journal of Medical Systems*, 12, pp. 169-179.
- Guinet, A., Chaabane, S., (2003) Operating Theatre Planning. *International Journal of Production Economics*, 185, pp. 69-81.
- Higle, J. L., Sen, S., (1991) Statistical verification of optimality conditions. *Annals of Operations Research*, 30, pp. 215-240.
- Jebali, A., Alouane, A.B.H., Ladet, P., (2006) Operating rooms scheduling. *International Journal of Production Economics*, 99, pp. 52-62.
- Jebali, A., Bouchriha, H., (2007) Evaluation de deux stratégies de planification des interventions dans un bloc opératoire central. *Logistique hospitalière*, 29, 15, 1.
- Jebali, A., Aniba, S., (2011) A stochastic approach for operating rooms planning. *International Conference on Industrial Engineering and Systems Management IESM'11*, Metz, France.
- Junger, A., Benson, M., Quinzio, I., (2003) An anesthesia information management system as a tool for controlling resource management of operating rooms. *Methods Inf Med*, 41, pp. 81-5.
- King, A.J., Wets, R.J.B., (1989) Epiconsistency of convex stochastic programs. *Stochastic and Statistics Reports*, 34, 83-92.
- Lafon, N., Landry, S., (2001) Gérer plus efficacement les stocks du bloc opératoire à partir de la programmation des interventions chirurgicales. *Gestion hospitalière*, 405.
- Lamiri, M., Xie X., (2006) Operating rooms planning using langrangian relaxation technique. *Conference IEEE'06*, Shanghai, China.
- Lamiri, M., Xie, X., (2007) Surgery planning with uncertain operating times. *ORAHS'07*.
- Lamiri, M., Xie, X., Dolgui, A., Grimaud, F., (2008) A stochastic model for operating room planning with elective and emergency demand for surgery. *European Journal of Operational Research*, 185, pp. 1026-1037.
- Lamiri, M., Xie, X., Zhang, S., (2008) Column generation for operating theatre planning with elective and emergency patients. *IIE Transactions*, 40, pp. 838-852.
- Lamiri, M., Grimaud, F., Xie, X., (2009) Optimization methods for a stochastic surgery planning problem. *International Journal of Production Economics*, 120, pp. 400-410.
- Macario, A., Vitez, T., Dunn, B., McDonald, T., (1995) Where are the costs in perioperative care? Analysis of hospital costs and charges for inpatient surgical care. *Anesthesiology*, 83, pp. 1138-1144.
- Macario, A., Dexter, F., (1999) Estimating the duration of a case when the surgeon has not recently scheduled the procedure at the surgical suite. *Anesthesia and Analgesia*, 89, 5, pp. 1241-5.
- Marty, J., (2003) *Organisation - Qualité - Gestion du risque en Anesthésie-Réanimation*. Paris: Masson.
- Meuli C., (2004) *Prévision des durées d'interventions électives dans le cadre de la programmation de l'activité d'un bloc opératoire : Etude du cas de l'Hôpital de La Chaux-de-Fonds*. Thèse de doctorat. Ecole des HEC, Lausanne.
- Min, D., Yih, Y., (2010) An elective surgery scheduling problem considering patient priority. *Computers & Operating Research*, doi: 10.1016/j.cor.2009.09.016;37:1091-1099.
- Paquet, M., Martel, A., Montreuil, B., (2007) A manufacturing network design model based on processor and worker capacities. *International Journal of Production Research*, pp. 1-22.
- Roland, B., Riane, F., (2010) When OR techniques help Ors management. *International Conference on Information Systems, Logistics and Supply Chain*, Casablanca, Morocco.
- Ruszczynski, A., Shapiro, A., (2003) *Stochastic Programming. Handbook in Operations Research and Management Science*, Elsevier Science, Amsterdam.
- Shapiro, A., (2001) Monte Carlo simulation approach to stochastic programming. *Proceedings of the 33rd conference on Winter simulation*, pp. 428 - 431, Arlington, Virginia.
- Shapiro, A., Dentcheva, D., Ruszcynski, A., (2009) *Lectures on stochastic programming Modeling and Theory*. By the Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society.
- Sobolev, B., Kuramoto, L., (2007) *Analysis of waiting-time data in health service research*. New York: Springer.
- Strum, D.P., May, J.H., Vargas, L.G., (2000) Modeling the uncertainty of surgical procedure times: comparison of log-normal and normal models. *Anesthesiology*, 16, 1160-1167.
- Testi, A., Tanfani, E., Torre, G., (2007) A three-phase approach for operating theatre schedules. *Health Care Management Science*, 10, pp. 163-172.
- Vissers, J.M.H., (1998) Patient flow-based allocation of inpatient resources: A case Study. *European Journal of Operational Research*, 105, pp. 356-370.
- Wright, I.H., Kooperberg, C., Bonar, A.B., Bashein, G., (1996) Statistical modeling to predict elective surgery time. *Anesthesiology*, 85, 6.
- Zhou, J., Dexter F., (1998) Method to assist in the scheduling of add-on surgical cases, upper prediction bounds for surgical case durations based on the log-normal distribution. *Anesthesiology*, 89, 1228-1232.
- Zhou, J., Dexter, F., Macario, A., Lubarsky, D.A., (1999) Relying solely on historical surgical times to estimate accurately future times is unlikely to reduce the average length of time cases finish late. *J Clin Anesth*, 11, 7, pp. 601-5.