

Lot économique de production et contrôle des systèmes manufacturiers non-fiables avec inspection rectificante

Bassem Bouslah¹, Ali Gharbi², Robert Pellerin¹,

¹ Département génie industriel,

École Polytechnique de Montréal, Université de Montréal,
2500, Chemin de Polytechnique, Montréal (QC), Canada H3T 1J4,
E-mail : bassem.bouslah@polymtl.ca, robert.pellerin@polymtl.ca

² Département génie de la production automatisée,

École de Technologie Supérieure, Université du Québec,
1100, rue Notre-Dame Ouest, Montréal (QC), Canada H3C 1K3,
E-mail : ali.gharbi@etsmtl.ca

Résumé - Cet article s'intéresse au problème de contrôle de la production par lots d'un système manufacturier soumis à des pannes et réparations aléatoires et qui produit des pièces non conformes rectifiables. Le contrôle de la qualité des lots produits avant l'entrée au stock final s'effectue par un plan d'échantillonnage simple. La politique de contrôle de la production utilisée est de type seuil critique et consiste à maintenir la position d'inventaire dans une plage de variation qui permet au stock final de continuer à satisfaire la demande quand le système manufacturier tombe en panne. Les variables de décision de cette politique sont la taille des lots de production et le niveau du seuil critique. L'objectif visé par ce travail est de développer un modèle de simulation permettant d'optimiser expérimentalement les variables de décision de la politique de contrôle de la production dans le cas où les temps d'interpannes et de réparation suivent des distributions de probabilité générales.

Abstract - This article considers the problem of batch production control of an unreliable and imperfect manufacturing system. We assume that the non-conforming items are rectifiable. The quality control of batches before entering in the final inventory is performed by a single sampling plan. The type of the control policy used here is a hedging point policy that consists in maintaining the inventory position within a variation range that allows the final inventory to continue to meet the demand when the manufacturing system becomes unavailable. The decision variables of this policy are the production lot sizing and the hedging point level. The objective of this work is to develop a simulation model to optimize experimentally the decision variables of the production control policy when the failure and repair times are general probability distributions.

Mots clés - Systèmes manufacturiers non-fiables, lot économique de production, production de type seuil critique, plan d'échantillonnage, simulation.

Keywords - Unreliable manufacturing systems, economic production quantity, hedging point policy, acceptance-sampling plan, simulation.

1 INTRODUCTION

Le problème de planification de la production des systèmes manufacturiers non fiables a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Parmi ceux-ci, [Kimemia et Gershwin, 1983] qui ont introduit la notion de la politique de production à seuil critique. Cette politique consiste à maintenir un niveau de stock optimal (ou seuil critique) lorsque le système de production est en état opérationnel pour continuer à satisfaire la demande quand le système est en panne. [Akella et Kumar, 1986] ont étudié le cas d'une machine qui fabrique un seul type de produit, et ils ont montré analytiquement l'existence d'un tel seuil critique optimal de stock, nommé *hedging point*, qui minimise le coût espéré total actualisé sur horizon infini. [Bielecki et Kumar, 1988] ont obtenu une autre solution optimale du seuil critique pour le problème de minimisation du coût total moyen. Dans la littérature, on peut trouver plusieurs extensions et études de propriétés de la politique de production à seuil critique. On réfère le lecteur, à titre d'exemple, à

[Sharifinia, 1988], [Gershwin, 1994], [Sethi et al., 1998] et [Gershwin, 2000]. Tous ces travaux se basent sur l'hypothèse du temps de pannes et de réparation exponentiels. Cependant, [Kenné et Gharbi, 2000] ont généralisé la politique de production à seuil critique dans le cas où les processus de pannes et de réparations sont non-markoviens, et/ou la demande est aléatoire. Ils ont développé et validé un modèle de simulation permettant de déterminer le seuil critique quelque soit les distributions de probabilité des pannes et des réparations, et de la demande. Le recours à la simulation a été justifié par les difficultés d'application de la théorie de contrôle classique pour les processus non-markoviens.

Dans les systèmes manufacturiers à forte cadence de production et faisant face à un taux de demande élevé, on parle plutôt des lots de production. Il s'agit généralement des systèmes produisant des items de faibles dimensions (produits alimentaires, pharmaceutiques, mécaniques de petites tailles, etc.). Dans ce cas, on doit déterminer

simultanément la taille optimale du lot de production et le niveau optimal du stock de sécurité. [Groenevelt et al., 1992a] sont les premiers qui ont cherché à déterminer la taille optimale du lot de production dans les systèmes manufacturiers soumis à des pannes aléatoires. Le critère d'optimisation était la minimisation du coût total moyen à long terme, incluant le coût de stockage, les coûts de maintenance corrective et préventive et le coût de mise en course. Sous les hypothèses du taux de production déterministe et constant, de délai de réparation négligeable, de rupture de stock non permise et de distribution exponentielle des temps inter-pannes, les auteurs ont proposé deux politiques de contrôle de la production : la première assume qu'il n'y a pas de reprise de la production du lot interrompu après réparation (*No-Resumption policy*), et la deuxième politique assume qu'on reprend la production du lot après réparation si le niveau de stock disponible est inférieur à un certain seuil (*Abort/Resume policy*). Dans les deux cas, la taille optimale du lot de production est toujours supérieure à la taille du lot économique de production classique [Silver et Peterson, 1985]. Ceci s'explique par la nécessité de faire face aux pertes de production suite aux pannes aléatoires. [Groenevelt et al., 1992b] ont développé une politique de contrôle permettant de déterminer la taille optimale du lot de production dans le cas où les temps d'interpannes suivent une distribution exponentielle et les délais de réparation suivent des distributions aléatoires générales. Ils assument qu'une fraction des lots produits se transforme en stock de sécurité qui sert à satisfaire la demande aux moments d'indisponibilité du système manufacturier. [Kim et Hong, 1997] et [Kim et al., 1997] ont étendu le modèle de [Groenevelt et al., 1992a] dans le cas où les temps d'interpannes suivent une distribution générale. [Abboud, 1997] a présenté un modèle approximé du lot économique de production dans le cas où les pannes dans chaque cycle de production des lots suivent une distribution de poisson, et les temps de réparation suivent une distribution générale. [Giri et Yun, 2005] ont étudié le problème de la quantité économique de production des systèmes manufacturiers soumis à des pannes et réparations exponentielles, en assumant qu'au maximum deux pannes pourraient apparaître durant chaque cycle de production et que les pénuries sont couvertes partiellement. Dans tous ces travaux, on suppose toujours que le système produit des pièces conformes aux spécifications exigées (*perfect process*).

Toutefois, [Ben-Daya, 2002] a développé un modèle intégré du lot économique de production et de la maintenance préventive d'un système manufacturier qui peut passer aléatoirement de l'état 'in-control' à un état 'out-of-control' au moment où il commence à produire une proportion d'items non conformes. Il assume que les délais d'inspection et de maintenance sont négligeables, et que la pénurie n'est pas permise. [Chakraborty et al., 2008] ont étudié un modèle intégré du lot économique de production et de la maintenance préventive d'un système manufacturier non fiable qui peut changer, à des instants aléatoires, de l'état 'in-control' à un état 'out-of-control'. La taille optimale du lot de production est alors déterminée en calculant la durée optimale du cycle de production. [Chakraborty et al., 2009] ont étendu leur précédent travail pour traiter un modèle du lot économique de production avec inspection planifiée, dans le cas où le système

manufacturier peut changer aléatoirement de l'état 'in-control' à l'état 'out-of-control', et soumis en même temps à des pannes aléatoires.

Dans la littérature, l'effet de l'inspection sur la taille du lot économique de production et le stock de sécurité a été souvent négligé. L'inspection a été considérée comme un outil pour évaluer l'état de contrôle du système de production ('in-control' ou 'out-of-control'), et prendre des décisions pour faire ou ne pas faire la maintenance corrective. A notre connaissance, il existe une seule exception dans la littérature, celle de Porteus (1990) qui a étudié l'impact du délai d'inspection sur la taille optimale du lot de production. En réalité, l'inspection peut avoir un autre rôle déterminant pour prendre des décisions d'acceptation ou non des lots contenant des items non conformes afin d'assurer un certain niveau de la qualité des produits vis-à-vis les clients.

Dans cet article, nous proposons une politique de contrôle de la production par lots de type de seuil critique dans un contexte de contrôle de la qualité d'un système manufacturier non fiable et imparfait (*imperfect process*). Nous étudions le cas de l'inspection des lots par un plan d'échantillonnage simple, où les lots sont soit acceptés, soit contrôlés à 100% afin d'identifier tous les items non conformes existants et les rectifier. L'objectif premier de notre travail est de présenter une approche expérimentale basée sur la simulation permettant de calculer la taille du lot économique de production et le niveau de seuil critique optimal, quelles que soient les distributions des temps d'interpannes et de réparation. Le critère d'optimisation est la minimisation du coût total de système incluant les coûts de mise en inventaire et de rupture de stock, et tous les coûts liés au contrôle de la qualité.

Ce papier est structuré de la façon suivante. La section 2 présente les hypothèses et les notations que nous allons utiliser pour modéliser le problème étudié. La section 3 décrit le système de production et la politique de contrôle. Nous présentons, ainsi, le modèle d'optimisation et l'approche expérimentale de résolution. La section 4 présente un exemple numérique avec une analyse de sensibilité sur les coûts. Le papier se termine par une conclusion dans la section 5.

2 NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Pour formuler le problème étudié, nous considérons les hypothèses et les notations (Tableau 1) suivantes :

Hypothèses :

- (A1) Le système produit un seul type d'items pour faire face à un taux de demande très élevé et constant.
- (A2) Dans la littérature (exemple [Abboud, 1997] et [Giri et Yun, 2005]), certaines contraintes ont été imposées sur le nombre de pannes durant chaque cycle de production. Nous étendons notre étude au cas où plusieurs pannes pourraient apparaître pendant le même cycle de production. Nous assumons que la production des lots interrompus est toujours reprise après réparation.
- (A3) La qualité effective des lots est égale à la probabilité p de produire des items non conformes. Nous assumons que cette probabilité est toujours constante.
- (A4) Tous les défauts de non-conformité sont réparables.
- (A5) La rupture de stock est permise, mais est sujette à un coût de pénurie.

Tableau 1. Définition des notations

Notation	Définition
$x(t)$	Niveau d'inventaire à l'instant t
$y(t)$	Position d'inventaire à l'instant t
$u(t)$	Taux de production à l'instant t
$u^i(t)$	Taux de production du $i^{\text{ème}}$ lot à l'instant t
u_{max}	Taux maximal de production
dem	Taux de la demande
Q	Taille du lot à former
$q(t)$	Niveau du lot encours de production à l'instant t
p	Probabilité de produire des items non conformes
n	Taille de l'échantillon
c	Critère d'acceptation
d	Nombre d'items non conformes dans l'échantillon n
$N_i(t)$	Nombre cumulatif des lots produits à l'instant t
P_a	Probabilité d'acceptation des lots
θ_i	Temps du début de production du $i^{\text{ème}}$ lot
δ_i	Temps de la fin de production du $i^{\text{ème}}$ lot
MTBF	Temps moyen de bon fonctionnement du système
MTTR	Temps moyen de réparation
τ_{insp}	Temps unitaire d'inspection
τ_{rect}	Temps unitaire de rectification
c^+	Coût unitaire de stockage
c^-	Coût unitaire de pénurie
c_{insp}	Coût unitaire d'inspection
c_{rect}	Coût unitaire de rectification
c_{ret}	Coût unitaire de retour des items non conformes
CT	Coût total

3 FORMULATION DU PROBLÈME

3.1. Description du problème

Nous étudions un système manufacturier flexible soumis à des pannes et réparations aléatoires, qui produit un seul type d'items par lots de même taille Q . L'état du système peut être décrit par un processus stochastique continu $\{\alpha(t), t > 0\} \in \{0, 1\}$ avec $\alpha(t)=1$ quand le système est disponible et $\alpha(t)=0$ sinon. Le système manufacturier est imparfait d'où la production d'une certaine proportion p d'items non conformes.

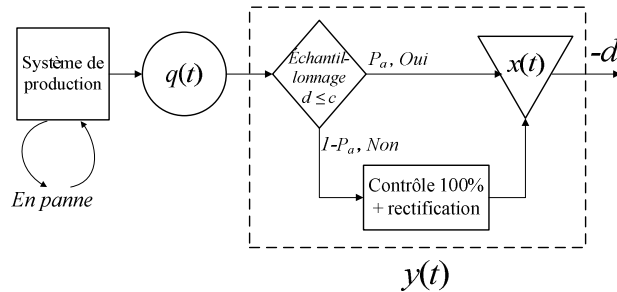


Figure 1. Système manufacturier non fiable avec contrôle de la qualité par échantillonnage simple.

Le lot en cours de production est stocké dans un espace en aval du système manufacturier (Figure 1). Soit $q(t)$ le niveau du lot encours de production à l'instant t . Une fois produit, on effectue un contrôle de qualité sur le lot afin de déterminer s'il est acceptable ou non. Le contrôle de la qualité se fait par un plan d'échantillonnage simple de paramètres n et c . Un échantillon de taille n est prélevé au hasard et contrôlé item par item. La durée totale de l'inspection de l'échantillon est égale à $n \cdot \tau_{insp}$. Si le nombre d'items non conformes d dans l'échantillon ne dépasse pas le critère d'acceptation c , le lot est accepté et les d items

non conformes sont remplacés par des items conformes avant d'envoyer le lot au complet au stock final. Sinon, le lot n'est pas accepté. Dans ce cas, on effectue un contrôle à 100% afin d'identifier et rectifier les $(p \cdot Q - d)$ items non conformes qui existaient dans le lot. La durée totale du contrôle à 100% est égal à $(Q-n) \cdot \tau_{insp}$, et la durée de la rectification est égale, en moyenne, à $p \cdot Q \cdot \tau_{rect}$.

La figure 2 décrit graphiquement les dynamiques de production et de stock. Le délai de production d'un certain lot dépend de quatre facteurs : la taille du lot Q , la cadence $u(\cdot)$ durant le cycle de production, le nombre de pannes durant la formation du lot, et les temps aléatoires de réparation. Le cycle de production d'un $i^{\text{ème}}$ lot peut être décrit par l'intervalle de temps $[\theta_i, \delta_i]$. La production commence à l'instant θ_i , et se termine à l'instant δ_i qu'on peut écrire sous la forme suivante : $\delta_i = \theta_i + Q / u(\cdot) + \sum_k TR_{k,i}$, avec k le nombre de

pannes/réparations pendant la production du $i^{\text{ème}}$ lot, et $TR_{k,i}$ est le délai de la $k^{\text{ème}}$ réparation du $i^{\text{ème}}$ cycle de production. L'entrée du $i^{\text{ème}}$ lot produit au stock final s'effectue à l'instant $(\delta_i + n \cdot \tau_{insp})$ si le lot est accepté, et à l'instant $(\delta_i + Q \cdot \tau_{insp} + p \cdot Q \cdot \tau_{rect})$ si le lot n'est pas accepté.

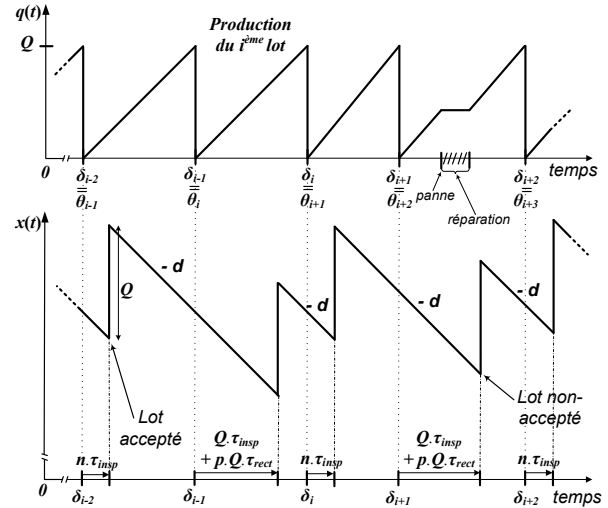


Figure 2. Dynamique de production et de stock.

D'après [Besterfield, 2009] et [Montgomery, 2009], la probabilité d'acceptation P_a d'un lot contenant d items non conformes peut être calculée en utilisant la loi binomiale :

$$P_a = P\{d \leq c\} = \sum_{d=0}^c \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d}$$

Le fait que les lots acceptés ne sont pas contrôlés à 100%, des items non conformes peuvent pénétrer au stock final avec ces lots. D'après [Montgomery, 2009] et [Schilling, 2009], le pourcentage moyen des items non conformes qui peuvent exister dans le stock final, ou ce qu'on appelle la qualité moyenne des lots après contrôle AOQ , peut être calculée par la formule suivante :

$$AOQ = \frac{P_a p (Q - n)}{Q}$$

3.2. Politique de contrôle de la production

Dans la littérature, le contrôle de la production des systèmes manufacturiers avec délais (de manutention, transport, etc.)

est basé souvent sur le contrôle de l'état de la position d'inventaire (somme de niveau d'inventaire et des items en cours de production, transport, etc.). Nous référons le lecteur, à titre d'exemple, à Mourani et al. (2008) et Li et al. (2008) qui ont étudié l'impact de délai de transport des items produits vers le stock final, sur les performances des systèmes de production. Par analogie, nous définissons la position d'inventaire $y(\cdot)$ comme critère de contrôle de l'inventaire en main; soit $y(\cdot)$ la somme de niveau d'inventaire $x(\cdot)$ et de la quantité totale des lots en cours d'inspection et de contrôle à 100% s'ils existent.

La politique de contrôle de type seuil critique que nous proposons pour planifier la production est donc décrite par l'équation suivante :

$$u^i(t \in]\theta_i, \theta_{i+1}]) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } (y(\theta_i^+) < Z) \text{ et } (\alpha(t) = 1) \\ dem & \text{si } (y(\theta_i^+) = Z) \text{ et } (\alpha(t) = 1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1)$$

$i=0,1,\dots,\infty$

En effet, au début de chaque $i^{\text{ème}}$ cycle de production, on contrôle la position d'inventaire $y(\cdot)$. Si la position d'inventaire est inférieure au seuil critique Z , on produit le $i^{\text{ème}}$ lot avec la cadence maximale u_{\max} . Si au début de formation du lot, la position d'inventaire est égale au seuil critique Z , on produit le lot avec une cadence égale au taux de la demande dem afin de maintenir la variation de la position d'inventaire entre les deux niveaux Z et $Z-Q$ (Figure 4). Si la position d'inventaire dépasse Z , on arrête la production. L'instant θ_i de lancement de la production du $i^{\text{ème}}$ lot est donc retardé jusqu'à l'instant où la position d'inventaire descend au niveau de seuil critique par l'effet de consommation du stock final (demande continue). Une telle situation apparaît quand on vient de changer le taux de production de u_{\max} à dem , après chaque redémarrage de la production suite à une réparation du système manufacturier. Le contrôle de la disponibilité du système de production se fait en temps réel. Si à un instant donné le système devient non-disponible, la production s'arrête instantanément.

3.3. Modèle d'optimisation

L'objectif de notre de travail est de déterminer les valeurs optimales du lot de production Q et de seuil critique Z qui permettent de minimiser le coût total moyen. Ce coût inclut les coûts partiels suivants :

- le coût moyen de stockage du lot en cours de production, des lots en cours d'inspection ou de contrôle à 100%, et d'inventaire final,
- le coût moyen de pénurie,
- le coût moyen d'inspection,
- le coût moyen estimé de contrôle à 100% et de rectification, et le coût moyen de retour des items non conformes.

Toute solution faisable (Q, Z) doit respecter les deux contraintes suivantes :

- la taille du lot ne doit pas dépasser une certaine capacité maximale Q_{\max} de stockage des lots en cours de production,
- et le niveau de seuil critique doit être supérieur ou égal à la taille du lot de production pour assurer un minimum de satisfaction de la demande pendant les périodes de production normale ($u(\cdot)=dem$).

Donc, le modèle d'optimisation peut être décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{Q,Z} \quad E[CT] = c^+ (E[q] + E[y^+]) + c^- E[x^-] \\ \quad + c_{\text{insp}} n E[N_i] \\ \quad + (1 - P_a) (c_{\text{insp}} (Q - n) + c_{\text{rect}} p Q) E[N_i] \\ \quad + c_{\text{ret}} E[\beta] A O Q d \\ \text{S.C} \quad 0 < Q \leq Q_{\max} \\ \quad Z \geq Q \end{array} \right.$$

avec $y^+(t) = \max(0, y(t))$, $x^-(t) = \max(0, -x(t))$,

et $\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(t) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (niveau de satisfaction instantané de la demande).

Vu la difficulté de déterminer une expression analytique explicite exacte de la fonction coût total moyen en fonction des variables de décision Q et Z surtout dans le cas où les processus de pannes et/ou de réparation sont non-markoviens, nous préconisons une approche expérimentale basée sur la simulation pour approximer la fonction coût et déterminer les conditions optimales de la politique de contrôle de la production.

3.4. Approche expérimentale basée sur la simulation

L'approche expérimentale que nous avons adopté pour déterminer les conditions optimales (Q^*, Z^*) de la politique de production, a été élaboré et validé par [Kenné et Gharbi, 2000]. L'approche est constituée de deux étapes ; dans la première, il s'agit de développer et valider un modèle de simulation du système étudié. La deuxième étape consiste à appliquer une combinaison des méthodes statistiques telles que les plans d'expériences, l'analyse de la variance (ANOVA) et la méthode de surface de réponse sur des données recueillies du modèle de simulation afin de trouver une fonction qui permet d'exprimer et d'optimiser la variable de réponse (ici, coût total moyen) en fonction des variables d'entrée Q et Z .

Le modèle de simulation que nous avons développé en utilisant le langage de simulation SIMAN et des routines C++ [Pegden et al., 1995], est un modèle combiné discret-continu : la partie discrète modélise le contrôle de la production, le contrôle de la qualité, les pannes et les réparations, et la partie continue modélise la demande, et le calcul instantané du niveau et position d'inventaire. Le principe de modélisation est schématisé par le diagramme de la figure 3. La position instantanée de l'inventaire $y(t)$ est modélisée par le calcul instantané de la différence entre la production cumulative $P(t)$ et la demande cumulative $D(t)$ à l'instant $t \Rightarrow y(t) = P(t) - D(t) + y$, $y(0) = y$. Le niveau instantané de stock final $x(t)$ est modélisé par le calcul instantané de la différence entre la quantité cumulative des items produits arrivés au stock final $PE(t)$ et la demande cumulative $D(t)$ à l'instant $t \Rightarrow x(t) = PE(t) - D(t) + x$, $x(0) = x$. Enfin, le modèle a été exécuté avec le logiciel *Arena simulation*.

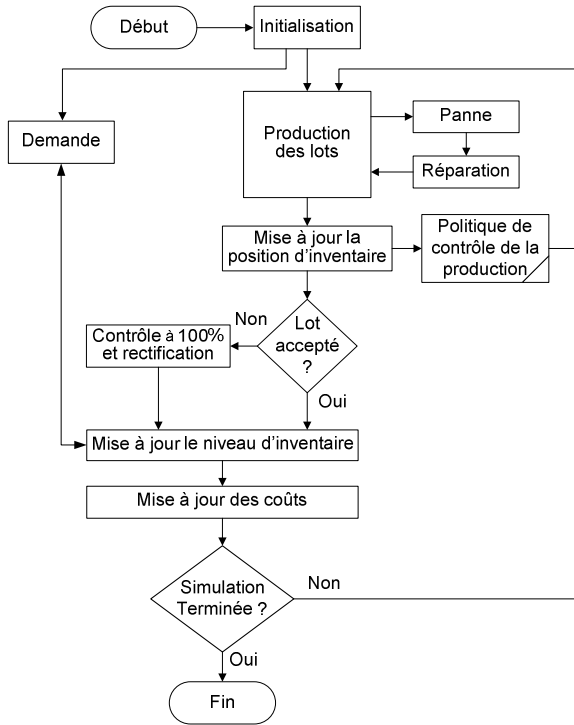


Figure 3. Diagramme du modèle de simulation.

Dans le but de valider le modèle de simulation, nous vérifions graphiquement les trajectoires du taux de production $u(\cdot)$ et de la position d'inventaire $y(\cdot)$. La figure 4 présente ces trajectoires durant l'exécution de la simulation. La projection temporelle des instants de changement de la valeur du taux de production sur la trajectoire de la position d'inventaire montre que le modèle de simulation fonctionne correctement tel que décrit dans l'équation (1). En plus, le modèle a été validé dans le cas où la taille du lot est égale à un (production item-par-item), la probabilité d'acceptation est égal à 100% (cas du système manufacturier parfait), et délai d'inspection négligeable, avec le modèle de simulation de la politique de contrôle de production de type seuil critique classique de [Kenné et Gharbi, 2000].

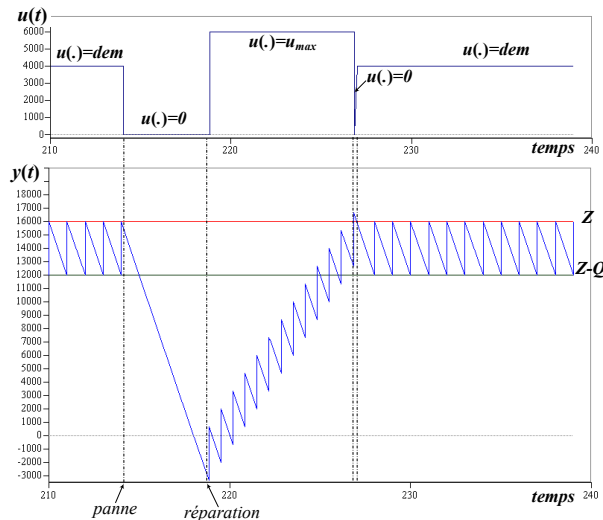


Figure 4. Dynamiques de la production et de la position d'inventaire.

4 EXPÉRIMENTATION ET ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans cette partie, nous traitons un exemple illustratif d'un système manufacturier non-fiable et imparfait qui produit des items par lots. Nous appliquons l'approche expérimentale dans le but de déterminer les paramètres optimaux (Q^*, Z^*) de la politique de contrôle de la production.

4.1. Paramètres de simulation

Les données suivantes présentent les paramètres de l'exemple de simulation : $u_{max} = 6000$, $dem = 4000$, $p = 5\%$, $n = 48$, $c = 2$, $\tau_{insp} = 10^{-5}$, $\tau_{rect} = 3.5 \times 10^{-5}$, $MTBF \sim \text{Gamma}(0.5, 100)$, $MTTR \sim \text{Gamma}(0.5, 10)$, $c^+ = 0.1$, $c^- = 1.5$, $c_{insp} = 0.5$, $c_{rect} = 5$, et $c_{ret} = 10$. Les valeurs de u_{max} et dem sont choisies d'une façon à respecter la condition de faisabilité du système, décrite par l'inéquation suivante :

$$\frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \cdot u_{max} > dem.$$

La loi Gamma a été bien utilisée dans la littérature ([Singpurwalla, 1971], [Ingalls & Eckersley, 1992]) pour modéliser les temps de pannes et de réparations lorsque des données réelles ne sont pas disponibles. Le coût de pénurie a été beaucoup plus pénalisé que le coût de stockage. De même, le coût de retour d'un produit non conforme est plus supérieur au coût de rectification.

Le tableau 1 présente les limites de variation des variables indépendantes Q et Z . Ces limites ont été fixées après certains tests de simulation afin de centrer la région optimale de la réponse.

Tableau 1. Niveau des variables indépendantes

Facteurs	Limite inférieure	Point au centre	Limite supérieure
Q	4000	7000	10000
Z	16000	24000	32000

4.2. Méthodologie de surface de réponse

La méthodologie de surface de réponse est un ensemble de techniques statistiques et mathématiques qui permettent d'optimiser une variable de réponse en fonction de plusieurs variables de décision [Myers, 2009]. Nous assumons tout d'abord qu'il existe une fonction continue $\Phi(\cdot)$ qui exprime le coût total en fonction des facteurs Q et Z . Pour bien estimer cette fonction, nous préférons l'associer un modèle quadratique afin d'examiner la convexité de la fonction coût total moyen. L'approximation de la fonction coût par un modèle quadratique est largement utilisée dans la littérature, voir à titre d'exemple [Gershwin, 1994] et [Kenne and Gharbi, 1999]. La forme générale de la fonction coût total moyen prend donc la forme suivante :

$$E[CT] = \beta_0 + \beta_1 Q + \beta_2 Z + \beta_{12} QZ + \beta_{11} Q^2 + \beta_{22} Z^2 + \varepsilon,$$

où β_0, β_i ($i = 1, 2$), β_{12}, β_{ii} ($i = 1, 2$) sont les coefficients de régression et ε est l'erreur expérimentale. Les coefficients de régression sont estimés à partir des résultats de simulation en utilisant un logiciel d'analyse statistique. Le modèle de régression doit être validé par le calcul du coefficient de détermination ajusté R^2_{adj} , et la vérification des conditions d'homogénéité de la variance et la normalité des résidus.

4.3. Résultats de simulation

Les expériences de la simulation ont été effectuées à partir d'un plan d'expériences complet de deux facteurs à trois

modalités 3², avec un facteur-bloc représentant la génération des nombres aléatoires. Chaque expérience est répétée cinq fois en bloquant chaque fois les chaînes de génération des nombres aléatoires de *MTBF* et *MTTR*.

L'objectif d'utiliser un plan d'expériences avec blocage est de réduire la variabilité du modèle. Ensuite, nous avons utilisé le logiciel d'analyse statistique STATISTICA pour faire l'analyse de la variance, le calcul des coefficients de régression, l'analyse des résidus et l'optimisation des variables de décision *Q* et *Z*. Le tableau 2 présente l'analyse de la variance des données recueillies de la simulation. Pour chaque facteur (y compris l'effet linéaire *L* et quadratique *Q*) et leur interaction, le tableau présente la somme des carrés (SS), le degré de liberté (Df), le carré moyen (MS), le F-Ratio, et le niveau de signification P-value.

Tableau 2. Analyse de la variance.

Facteur	SS	Df	MS	F-Ratio	P-value
<i>Q</i> (L+Q)	118538	2	59269	137.774	0.000000
<i>Z</i> (L+Q)	1479106	2	739553	1719.128	0.000000
<i>Q.Z</i>	546386	1	546386	1270.102	0.000000
Blocs	857	4	214	0.498	0.737331
Erreur	15057	35	430		
Total SS	2159943	44			$R^2_{adj} = 0.99124$

Il est clair que tous les effets linéaires et quadratiques sont significatifs à un seuil de 5%. La valeur du coefficient de détermination ajusté est égale à 0.99124, ce qui signifie que 99.12% de la variabilité observée est expliquée par le modèle de régression [Montgomery, 2008]. Donc, la fonction coût total moyen est bien approximé par le modèle quadratique. En utilisant STATISTICA, le modèle de second-ordre correspondant est donné par l'équation suivante :

$$E[CT] = 7280.24 + 38.65 \times 10^{-3} Q - 198.48 \times 10^{-3} Z - 6.89 \times 10^{-6} QZ + 9.9 \times 10^{-6} Q^2 + 5.39 \times 10^{-6} Z^2$$

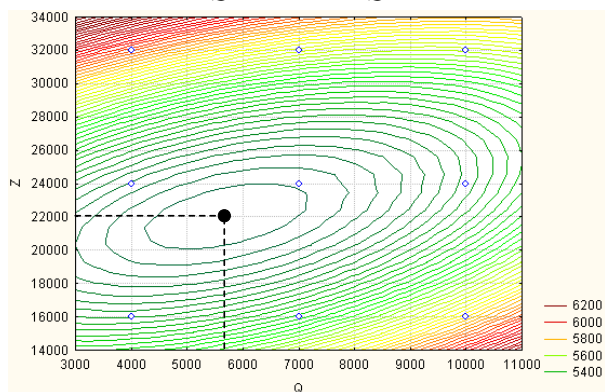


Figure 5. Contours de la variable de réponse.

La figure 5 présente les surfaces de contours de la variable de réponse. La figure permet de voir la convexité de la fonction coût total dans les domaines de variation de *Q* et *Z*, et montre l'existence d'une région optimale. Soit les paramètres optimaux suivants : $Q^* = 5713$ et $Z^* = 22045$. Ceci correspond à un coût minimal égal à 5202.90.

4.4. Analyse de sensibilité

Le tableau 3 présente une analyse de sensibilité sur les coûts de mise en inventaire, de pénurie, et d'inspection. L'objectif

de cette analyse est de prouver la robustesse de l'approche de résolution expérimentale, et d'étudier les effets de la variation de ces coûts sur le comportement du modèle, essentiellement sur les conditions optimales Q^* et Z^* .

Tableau 3. Analyse de sensibilité des coûts

Cas	c^+	c^-	c_{insp}	Q^*	Z^*	CT^*	Impact
1	0.1	1.5	0.5	5713	22045	5202.90	-
2	0.05	1.5	0.5	7674	27765	4111.46	Q↑ Z↑
3	0.15	1.5	0.5	3759	16598	6032.81	Q↓ Z↓
4	0.1	1.0	0.5	5942	17565	4938.29	Q↑ Z↓
5	0.1	2.0	0.5	5496	24268	5348.90	Q↓ Z↑
6	0.1	1.5	0.25	5642	21980	4768.34	Q↓ Z↓
7	0.1	1.5	0.75	5781	22106	5637.38	Q↑ Z↑

Variation du coût de stockage : Quand le coût de stockage unitaire augmente (resp. diminue) la taille du lot de production et le niveau de seuil critique diminuent (resp. augmentent). Dans le but de réduire le coût total de stockage du lot en cours de production, du lot encours d'inspection ou de contrôle à 100% et de stock final, le modèle réagit de façon à réduire la taille du lot et le niveau de seuil critique. La réduction de la taille du lot permet de réduire les délais de production, d'inspection et de contrôle 100% (puisque ces délais sont proportionnels à la taille du lot), et par suite d'améliorer l'alimentation de stock final, ce qui favorise en plus la réduction du niveau de seuil critique.

Variation du coût de pénurie : Quand le coût de pénurie unitaire augmente (resp. diminue), la taille du lot de production diminue (resp. augmente) et le niveau de seuil critique augmente (resp. diminue). Face à l'augmentation du coût de pénurie, le modèle réagit de façon à réduire le niveau d'inventaire négatif et à assurer une meilleure protection contre le risque de la rupture de stock, ce qui entraîne évidemment l'augmentation du niveau de seuil critique. La diminution de la taille du lot permet de réduire les intertemps d'entrée des lots produits au stock final (par la réduction des délais de production, d'inspection et de contrôle 100% des lots non acceptés) et par suite d'améliorer l'alimentation de stock et d'avantager la protection contre la pénurie.

Variation du coût d'inspection : Quand le coût d'inspection unitaire augmente (resp. diminue), la taille du lot de production et le niveau de seuil critique augmentent (resp. diminuent). Dans le but de réduire le coût total d'inspection, et de contrôler 100% des lots non acceptés, le modèle réagit de façon à réduire le nombre total des lots inspectés et contrôlés à 100%, d'où l'augmentation de la taille des lots. Le niveau de seuil critique augmente afin de protéger le stock final contre le risque de la pénurie puisque les délais de production et d'inspection vont augmenter aussi en fonction de la taille du lot de production.

5 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons étudié l'intégration d'un modèle du lot économique de production avec la politique de contrôle à seuil critique, dans un contexte de contrôle de la qualité. Notre choix d'utiliser la politique de contrôle à seuil critique est justifié par l'efficacité prouvée de cette politique dans la planification des systèmes de production unitaire non fiables. Dans le but d'assurer une optimisation globale du système de production, nous avons proposé un

modèle permettant d'optimiser les coûts d'inventaire et tous les coûts liés à la qualité. Ainsi, nous avons adopté une approche expérimentale basée sur la simulation afin de déterminer les valeurs optimales du couple (Q^* , Z^*). Dans les prochains travaux, nous étendrons ce modèle sur deux axes de recherche ; le premier aura pour objectif l'étude du cas multiproduit. Le deuxième axe de recherche tentera à optimiser le choix du plan d'échantillonnage et de ses caractéristiques.

6 RÉFÉRENCES

- Abboud, N. E. (1997). Simple approximation of the EMQ model with Poisson machine failures. *Production Planning and Control*, 8, 385-397.
- Akella, R., & Kumar, P. R. (1986). Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(2), 116-126.
- Ben-Daya, M. (2002). The Economic Production Lot-sizing Problem with Imperfect Production Processes and Imperfect Maintenance. *International Journal of Production Economics*, 76, 257-264.
- Besterfield, D. H. (2009). *Quality Control*, 8th Ed. Prentice Hall.
- Bielecki, T., & Kumar, P. (1988). Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems. *Operations research*, 36(4), 532-541.
- Chakraborty Tulika, Giri B.C., & Chaudhuri K.S. (2008). Production lot sizing with process deterioration and machine breakdown. *European Journal of Operational Research*, 185, 606-618.
- Chakraborty Tulika, Giri B.C., & Chaudhuri K.S. (2009). Production lot sizing with process deterioration and machine breakdown under inspection schedule. *Omega*, 37, 257-271.
- Gershwin, S. B. (1994). *Manufacturing systems engineering*: Prentice Hall.
- Gershwin, S.B. (2000). Design and operation of manufacturing systems: the control-point policy. *IIE Transactions on Automatic Control*, 32(10), 891-906.
- Groenevelt, H., Pintelon, L., & Seidmann, A. (1992a). Production Lot Sizing with Machine Breakdowns. *Management Science*, 38, 104-123.
- Groenevelt, H., Pintelon, L., & Seidmann, A. (1992b). Production Batching with Machine Breakdowns and Safety Stocks. *Operations Research*, 40, 959-971.
- Ingalls, R. G., & Eckersley, C. (1992). *Simulation issues in electronics manufacturing*. Paper presented at the Proceedings of the 24th conference on Winter simulation.
- Kenne, J., & Gharbi, A. (1999). Experimental design in production and maintenance control problem of a single machine, single product manufacturing system. *International journal of production research*, 37(3), 621-637.
- Kenné, J. P., & Gharbi, A. (2000). Production planning problem in manufacturing systems with general failure and repair time distributions. *Production Planning & Control*, 11, 581-588.
- Kim, C. H., & Y. Hong . (1997). An extended EMQ model for a failure prone machine with general lifetime distribution. *International Journal of Production Economics*, 49(3), 215-223.
- Kim, C. H., Hong, Y., & Kim, S-Y. (1997). An extended optimal lot sizing model with an unreliable machine. *Production Planning & Control*, 8(6), 577-585.
- Kimemia, J.G., & Gershwin, S.B. (1983). An algorithm for the computer control of a flexible manufacturing system. *IIE Transactions*, 15(4), 353-362.
- Montgomery, D. C. (2008). *Design and analysis of experiments*: John Wiley & Sons Inc.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to statistical quality control*, 6th Ed. NY: Wiley.
- Myers, R. H., Anderson-Cook, C. M., & Montgomery, D. C. (2009). *Response surface methodology : process and product optimization using designed experiments*, 3rd Ed. NJ: John Wiley & Sons.
- Pegden, C. D., Shannon, R. E., & Sadowski, R.P. (1995). *Introduction to Simulation Using SIMAN*, 2nd Ed. NY: McGraw-Hill.
- Porteus, E. L. (1990). The impact of inspection delay on process and inspection lot sizing. *Management Science*, 999-1007.
- Schilling, E. (2009). *Single Sampling by Attributes. Acceptance Sampling in Quality Control*, Second Ed. Chapman and Hall/CRC.
- Sethi, S. P., Suo, W., Taksar, M. I., & Yan, H. (1998). Optimal Production Planning in a Multi-Product Stochastic Manufacturing System with Long-Run Average Cost. *Discrete Event Dynamic Systems*, 8(1), 37-54.
- Sharifnia, A. (1988). Production control of a manufacturing system with multiple machine states. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 33(7), 620-625.
- Silver, E. A., & Peterson, R. *Decision systems for inventory management and production planning*. 1985. *JohnWiley and Sons*.
- Singpurwalla, N. D. (1971). Statistical Fatigue Models: A Survey. *Reliability, IEEE Transactions on*, 20(3), 185-189.