

Approches mono et multi-objective pour la conception d'un système de production à deux machines et un stock-tampon

YASSINE OUAZENE, HICHAM CHEHADE, ALICE YALAOUI

INSTITUT CHARLES DELAUNAY, LABORATOIRE D'OPTIMISATION DES SYSTEMES INDUSTRIELS
STM-UMR-CNRS 6279

Université de Technologie de Troyes, 10010 Troyes cedex, FRANCE
(yassine.ouazene, hicham.chehade, alice.yalaoui)@utt.fr

Résumé - Dans l'industrie manufacturière à gros volumes, les lignes en série sont un des types fondamentaux des systèmes de production. Le modèle de lignes à deux machines est souvent utilisé comme une base de construction pour analyser et développer des méthodes d'approximation pour des lignes de production plus grandes et plus complexes. Dans ce contexte, nous présentons une nouvelle formulation mathématique du problème de la conception d'un modèle à deux machines et un stock-tampon ayant comme objectifs: la maximisation du taux de production du système et la minimisation de la taille du stock sous contraintes d'un niveau de disponibilité minimal requis et d'un coût d'acquisition des machines limité. Les durées opératoires sont déterministes et les temps de défaillance et de réparation sont supposés être exponentiels. Nous proposons deux méthodes de résolution: mono-objectif et multi-objectif. La première est basée sur une méthode d'optimisation non-linéaire et la seconde consiste en un algorithme génétique multi-objectif de type NSGA-II.

Abstract - In large-volume manufacturing industry, serial production lines are a fundamental kind of production systems. The two-machine line model is often used as a building block to analyze and develop approximation methods for wider and more complex production systems. In this context, the addressed paper presents a new mathematical formulation of a serial flow line with two machines and a finite buffer design problem. The objective functions are: the maximization of the production rate of the system and the minimization of the buffer size under the constraints of a minimum level of availability required and a limited cost for acquiring machines. We propose mono-objective and a bi-objective resolution of the considered problem. The first one is based on the non linear programming method and the second one consists on a non-dominated sorting genetic algorithm (NSGA-II).

Mots clés - Conception de lignes de production, Optimisation non linéaire, Algorithme génétique multi-objectif (NSGA-II).
Keywords - Production lines design, Non-linear optimization, Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II).

1 INTRODUCTION

Une ligne de production est un système de fabrication à flots de produits. Elle est constituée d'une suite de stations de travail séparées par des zones de stockage tampons (buffers). Le transfert des produits entre les stations est assuré par différents systèmes de transport possibles tels que: les convoyeurs et les bandes roulantes. La problématique de la conception des lignes de production est basée sur des données concernant les produits et des contraintes technologiques liées aux machines et équipements de fabrication existants. C'est pourquoi, lors de la conception d'un système de production, toutes les alternatives fonctionnelles et technologiques doivent être étudiées.

Cette problématique de conception comprend plusieurs sous-problèmes tels que: la sélection de pièces d'équipements à partir d'un ensemble de solutions candidates pour chaque opération de fabrication; l'équilibrage et le dimensionnement des postes de travail (affectation des opérations aux postes de travail); le dimensionnement des zones de stockage (buffers); le dimensionnement des systèmes de transport; l'aménagement des emplacements; etc. [Rekiek et al, 2002].

L'analyse des performances d'une ligne de production est l'une des étapes principales de la phase d'optimisation de la conception. En effet, souvent la performance d'une ligne de production est exprimée en fonction du taux de production

global de la ligne. [Dallery et Gershwin, 1992] ont montré qu'on ne peut avoir une formulation analytique (solution exacte) du taux de production que dans le cas d'une ligne à deux machines. C'est pourquoi le modèle d'une ligne à deux machines est souvent utilisé comme une base de construction pour analyser et développer des méthodes d'approximation pour des lignes de production plus grandes et plus complexes. [Figour et al, 1991] ont démontré que l'utilisation des modèles à deux ou trois machines pour analyser des lignes plus grandes avait un intérêt plus important dans le cas discret que dans le cas continu.

La plupart des méthodes d'approximation sont basées soit sur la méthode d'agrégation, soit sur la méthode de décomposition [Li et al, 2009]. Pour la méthode d'agrégation, il s'agit de remplacer, de manière récursive, chaque deux machines avec une machine équivalente qui a le même taux de production. Plus de détails sur cette méthode peuvent être trouvés dans plusieurs travaux: [Lim et al, 1990], [Jacobs et Meerkov, 1993]. Pour la méthode de décomposition, dite de Gershwin [Gershwin, 1987], elle consiste à remplacer une ligne de production à M machines et $(M - 1)$ stocks intermédiaires par $(M - 1)$ systèmes à deux machines et un seul stock tampon.

Dans la littérature, plusieurs modèles à deux machines ont été étudiés et utilisés pour l'analyse des performances de systèmes plus complexes. Plusieurs axes de distinction entre ces

modèles ont été adoptés. Une distinction selon le type de la ligne de production : synchrone si les produits sont transférés simultanément d'une machine à une autre, asynchrone si chaque type de produit est transféré indépendamment des autres ou continue si les produits sont transférés de façon continue et à vitesse constante. Une distinction selon le mode de défaillance des machines. Deux types de défaillances sont considérés : défaillances dépendantes du temps (TDF : Time-dependent-failure) et défaillances dépendantes des opérations (ODF : Operation-dependent-failure). Dans le premier cas, l'état de panne d'une machine dépend du temps, i.e., une machine peut tomber en panne même si elle est bloquée ou affamée. Par contre, dans le second mode, la machine ne peut tomber en panne si elle est au repos. L'autre grand axe de classifications de ces modèles est la distribution des temps de pannes et des temps de réparations des machines. [Li et al, 2006] ont présenté une étude comparative entre les différents modèles à deux machines existant dans la littérature. Ils ont identifié huit différents modèles, classés selon le type de la ligne de production (synchrone ou asynchrone), selon le mode de défaillance (Time-dependent-failure ou Operation-dependent-failure) et enfin selon la loi de probabilité des temps de panne et de réparation (Bernoulli, géométrique et exponentielle). Le tableau ci-après résume ces différents modèles.

Tableau 1. Les différents modèles à deux machines et un stock-tampon

Auteurs	Type de ligne	Mode de défaillance	Distribution des temps de panne et de réparation
[Alden, 2002]	Asynchrone	ODF	Exponentielle
[Buzacott et Shanthikumar, 1993]	Synchrone	TDF et ODF	Géométrique
[Chiang et al, 2000,2001]	Asynchrone	TDF	Exponentielle
[Gershwin, 1994]	Synchrone	ODF	Géométrique
[Gershwin, 1994]	Asynchrone	ODF	Exponentielle
[Jacobs, 1993]	Asynchrone	TDF	Exponentielle
[Jacobs et Meerkov, 1995]	Asynchrone	TDF	Bernoulli
[Kuo, 1996]	Synchrone	TDF	Bernoulli
[Kuo, 1996]	Asynchrone	TDF	Bernoulli
[Li et Meerkov, 2003]	Synchrone	TDF	Géométrique

On peut souligner que les différents modèles analytiques existants sont des modèles mono-objectifs qui considèrent le taux de production comme principale mesure de performance. Notre contribution dans cet article consiste en un nouveau modèle mathématique multi-objectif qui considère à la fois la maximisation du taux de production et la minimisation de la taille du stock intermédiaire. Le modèle mathématique que nous proposons est valable dans le cas d'une ligne équilibrée (même capacité de production pour les deux machines) et aussi dans le cas d'une ligne non équilibrée (capacité de production différente pour chaque machine).

La suite de cette communication est organisée comme suit : dans la section 2, nous présentons la formulation détaillée du problème étudié ainsi que les différentes mesures de performances du système à deux machines. Dans la section 3, nous développons le modèle mathématique proposé. La section 4 présente les différentes approches de résolution que nous avons adoptées. La section 5 présente un résumé et une discussion des résultats expérimentaux. Enfin ce travail est clôturé par une conclusion et quelques perspectives pour une possible exploitation de ce travail dans des travaux de recherche futurs.

2 FORMULATION DU PROBLEME ET ANALYSE DES PERFORMANCES

Dans cet article, nous considérons deux machines (station de travail) reliées par une zone de stockage intermédiaire (Figure 1). Le système est sujet à des indisponibilités en raison de la capacité limitée du stock-tampon ou/et la défaillance et la réparation des machines. Nous considérons aussi les hypothèses suivantes :

1. Les durées opératoires des tâches sont déterministes.
2. L'état de panne des machines dépend des opérations. Une machine ne peut tomber en panne si elle est affamée ou bloquée.
3. La première machine ne peut être affamée et la seconde ne peut être bloquée.
4. Les temps de défaillance et de réparation sont indépendants et distribués suivant une loi exponentielle.
5. Lorsque les deux machines sont en pannes, elles peuvent être réparées simultanément
6. Le stockage ne peut tomber en panne et les temps de transition entre machines et stock sont nuls.

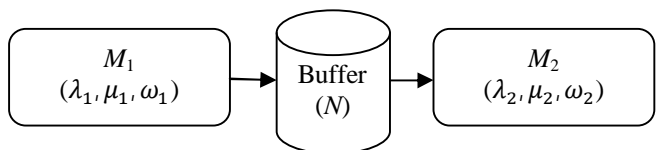


Figure 1. Système à deux machines et un stock-tampon

Nous adoptons aussi les notations suivantes :

N	la capacité (la taille) du stock
ω_i	la capacité de production de la machine M_i (pièces/unité de temps)
$\alpha = \omega_1/\omega_2$	le rapport des capacités de production
ρ_i	le taux de production de la machine M_i
λ_i	le taux de défaillance de la machine M_i
μ_i	le taux de réparation de la machine M_i
A_i	la disponibilité de la machine M_i
A_s	la disponibilité du système
I	le niveau de stock moyen dans le stock-tampon

P_j ; $j \in \{0,1,2, \dots, N\}$ la probabilité d'avoir j pièces dans le stock
 a_i, b_i, p_i, q_i, r_i les coefficients de la fonction coût

2.1 Analyse des états du stock-tampon

Considérant le stock comme un système isolé entre deux machines fiables, les différents états du système peuvent être modélisés par un processus de naissance et de mort. [Songui et Yao, 1992] ont étudié le cas où les durées opératoires sont stochastiques (loi exponentielle) et [Songui et Changjun, 1997] ont considéré le cas déterministe des durées opératoires. Pour se faire, on considère un processus de naissance et de mort avec $(N+1)$ états $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ et ω_1, ω_2 respectivement les taux de naissance et taux de mort. On obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\omega_1 \times P_0(t) + \omega_2 \times P_1(t) \\ P_j'(t) = \omega_1 \times P_{j-1}(t) - (\omega_1 + \omega_2) \times P_j(t) + \omega_2 \times P_{j+1}(t) \\ P_N'(t) = \omega_1 \times P_{N-1}(t) + \omega_2 \times P_N(t) \end{cases} \quad (1)$$

A l'état stationnaire du fonctionnement du système, les termes différentiels P_j' sont égaux à zéro. Donc le système d'équations (1) s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -\omega_1 \times P_0 + \omega_2 \times P_1 \\ 0 = \omega_1 \times P_{j-1} - (\omega_1 + \omega_2) \times P_j + \omega_2 \times P_{j+1} \\ 0 = \omega_1 \times P_{N-1} + \omega_2 \times P_N \end{cases} \quad (2)$$

Soit $\alpha = \omega_1/\omega_2$; en simplifiant le système d'équations (2) et en considérant $\sum_{j=1}^N P_j = 1$ on obtient :

$$P_j = \begin{cases} \frac{\alpha^j \times (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{N+1} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Le niveau de stock moyen dans le stock-tampon à l'état stationnaire du fonctionnement du système est calculé comme suit :

$$I = \sum_{j=1}^N j \times P_j = \begin{cases} \frac{N \times \alpha^{N+2} - (N+1) \times \alpha^{N+1} + \alpha}{\alpha^{N+2} - \alpha^{N+1} - \alpha + 1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{N}{2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Remarque : la formule du stock moyen est basée sur le calcul de série suivant :

$$\sum_{j=1}^N j \times \frac{\alpha^j (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{N+1}} \times \sum_{j=1}^N j \times \alpha^j$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N j \times \alpha^j &= \alpha \times \frac{\partial \sum_{j=1}^N j \times \alpha^j}{\partial \alpha} \\ &= \alpha \times \frac{\partial \frac{\alpha \times (1-\alpha^N)}{1-\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\alpha - (N+1) \times \alpha^{N+1} + N \times \alpha^{N+2}}{(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

2.2 Formulation de la disponibilité du système

En considérant que la réparation rétablit chaque machine comme à son état neuf, la disponibilité A_i de la machine M_i à l'instant t ainsi que sa disponibilité moyenne sont données par les expressions suivantes [Ebeling, 1997] :

$$A_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \times e^{-(\lambda_i + \mu_i) \times t} \quad (5)$$

$$A_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} A_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad (6)$$

Le système est dit disponible si au moins une des deux machines fonctionne. Pour formuler cette disponibilité, on considère tous les états possibles de chacune des deux machines. La première machine peut être en panne (défaillance), disponible et non bloquée ou disponible et bloquée si le stock-tampon est plein. La deuxième machine a également trois états possibles : en panne, disponible et non affamée ou disponible et affamée si le stock-tampon est vide. Compte tenu de ces états possibles, la disponibilité du système peut être écrite comme suit :

$$A_S = 1 - P[M_1 \text{ en panne et } M_1 \text{ en panne}] - P[M_1 \text{ disponible et bloquée et } M_2 \text{ en panne}] - P[M_2 \text{ disponible et affamée et } M_1 \text{ en panne}] \quad (7)$$

Plus implicitement :

$$A_S = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \left[\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \mu_1 \frac{\alpha^N (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} + \lambda_1 \mu_2 \frac{(1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} \right] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} + \frac{N}{N+1} \times \frac{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (8)$$

Cette fonction disponibilité est croissante en fonction de la taille de stock tel que :

$$A_S^{N=0} = \frac{\mu_1 \times \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1) \times (\lambda_2 + \mu_2)} \quad (9)$$

$$A_S^\infty = \begin{cases} \frac{\mu_1 \times \mu_2 + \alpha \times \lambda_1 \times \mu_2 + \lambda_2 \times \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1) \times (\lambda_2 + \mu_2)} & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{\mu_1 \times \mu_2 + \lambda_1 \times \mu_2 + \lambda_2 \times \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1) \times (\lambda_2 + \mu_2)} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{\mu_1 \times \mu_2 + \lambda_1 \times \mu_2 + \frac{1}{\alpha} \times \lambda_2 \times \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1) \times (\lambda_2 + \mu_2)} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \quad (10)$$

2.3 Calcul du taux de production du système

Le taux de production global du système peut être défini comme étant le nombre moyen de pièces traitées par la deuxième machine à l'état stationnaire du fonctionnement du système. Dans l'étude comparative présentée par [Li et al, 2006], deux modèles exponentiels sont consacrés au cas des lignes asynchrones avec un mode de défaillances dépendant des opérations. Il s'agit des modèles et d'Alden [Alden, 2002] et de Gershwin [Gershwin, 1994]. Dans le cas du premier modèle, en plus des hypothèses classiques citées ci-avant, les deux machines ne peuvent tomber en panne simultanément. En effet, lorsqu'une des deux machines est en panne, l'autre machine ne peut l'être et sa capacité de production est réduite à son taux de production propre. Ce dernier est défini par [Gershwin et Schor, 2000] en considérant la machine comme isolée du reste du système (sans considérer l'influence des autres machines et celle des stocks intermédiaires) comme suit :

$$\rho_i = \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad (11)$$

Cette réduction de la capacité de production de la machine est considérée comme une approximation pour compenser l'impact de l'hypothèse supplémentaire. Pour le deuxième modèle, en plus des hypothèses communes au modèle d'Alden, si les deux machines sont disponibles, le stock intermédiaire est vide et $\omega_1 < \omega_2$ alors la capacité des deux machines sera de ω_1 . Si les deux machines sont disponibles, le stock intermédiaire est plein et $\omega_1 > \omega_2$, alors la capacité des deux machines sera de ω_2 . [Songui et Yao, 1992] ainsi que [Songui et Changjun, 1997] ont proposé un autre modèle mathématique avec la possibilité que les deux machines tombent en panne et soient réparées simultanément.

Dans cadre de ce travail, nous adopterons ce dernier modèle parce que, d'une part il considère un cas général avec la possibilité que les deux machines soient en panne et d'autre part, parce que les deux premiers modèles ont été largement discutés dans [Li et al, 2006].

Pour calculer le taux de production réel de chaque machine, [Songui et Yao, 1992] et [Songui et Changjun, 1997] ont remplacé le système par une machine équivalente qui ne peut être ni bloquée, ni affamée ni tomber en panne. En se basant sur leur méthode, on obtient les taux de production réels (effectifs) de chaque machine :

$$\rho_1 = \begin{cases} \frac{\omega_1 \times \mu_1 \times (1-\alpha^N)}{(\mu_1 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_1 \times (1-\alpha^N))} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\omega_1 \times \mu_1 \times N}{(\mu_1 \times (N+1) + \lambda_1 \times N)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\rho_2 = \begin{cases} \frac{\omega_2 \times \mu_2 \times \alpha(1-\alpha^N)}{(\mu_2 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_2 \times \alpha(1-\alpha^N))} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\omega_2 \times \mu_2 \times N}{(\mu_2 \times (N+1) + \lambda_2 \times N)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (13)$$

Ainsi le taux de production du système ψ est le goulet (bottleneck) entre les deux taux de production individuels ρ_1, ρ_2 :

$$\psi = \min\{\rho_1, \rho_2\} = \begin{cases} \omega_1 \times \min\left\{\frac{\mu_1 \times (1-\alpha^N)}{\mu_1 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_1 \times (1-\alpha^N)}, \frac{\mu_2 \times (1-\alpha^N)}{\mu_2 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_2 \times \alpha(1-\alpha^N)}\right\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega_1 \times \min\left\{\frac{\mu_1 \times N}{\mu_1 \times (N+1) + \lambda_1 \times N}, \frac{\mu_2 \times N}{(\mu_2 \times (N+1) + \lambda_2 \times N)}\right\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (14)$$

3 LA FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE CONCEPTION

Dans cette section, nous présentons un modèle mathématique bi-objectif afin de maximiser le taux de production ψ et de minimiser la taille du stock-tampon N . $\lambda_i, \mu_i, \omega_i$ et N sont les variables de décision. La disponibilité du système, les choix technologiques possibles ainsi que le coût d'acquisition des machines sont considérés comme les contraintes du modèle. En effet, l'objectif est de trouver le meilleur compromis entre les deux objectifs tout en respectant un niveau de disponibilité minimal exigé et un budget d'investissement fixé au préalable.

$$\begin{cases} Z_1 = \text{Max } \min\{\rho_1, \rho_2\} \\ Z_2 = \text{Min } N \\ A_S \geq A_0 \\ C_m \leq C_0 \\ \lambda_i \in [\lambda_{imin}, \lambda_{imax}] \\ \mu_i \in [\mu_{imin}, \mu_{imax}] \\ \omega_i \in [\omega_{imin}, \omega_{imax}] \end{cases} \quad (15)$$

3.1 La fonction coût

Comme fonction coût d'acquisition d'une machine nous considérons une adaptation de celle proposée par [Elgebede et Adjallah, 2003] pour le problème de conception des systèmes réparables de type parallèle-série. Cette fonction considère un modèle coût qui dépend des caractéristiques techniques de chaque machine ($\lambda_i, \mu_i, \omega_i$).

$$C_m = \sum_{i=1}^2 a_i \times \lambda_i^{-p_i} + b_i \times \mu_i^{q_i} + c_i \times \omega_i^{r_i} \quad (16)$$

a_i, b_i, c_i, p_i, q_i et r_i sont des paramètres réels positifs.

- ($a_i \lambda_i^{-p_i}, a_i > 0, p_i > 0$) signifie que plus le taux de défaillance est faible, plus la machine coûte chère.
- ($b_i \mu_i^{q_i}, b_i > 0, q_i > 0$) signifie que plus le taux de réparation est important, moins chère sera la machine.
- ($c_i \omega_i^{r_i}, c_i > 0, r_i > 0$) signifie que plus la capacité de production est importante, plus chère sera la machine.

Les coefficients de cette fonction coût peuvent être estimés, en pratique, en se basant sur une base de données de maintenance. En effet, [Elgebede et Adjallah, 2003] ont adopté une méthode d'estimation basée sur la somme des moindres carrés. Considérant que $\lambda_i, \mu_i, \omega_i$ et C_{mi} sont connus pour K configuration différentes, les coefficients a_i, b_i, c_i, p_i, q_i et r_i peuvent être calculés en minimisant la somme suivante :

$$Q = \sum_{k=1}^K [a_i (\lambda_i^k)^{-p_i} + b_i (\mu_i^k)^{q_i} + c_i (\omega_i^k)^{r_i} - C_{mi}^k]^2$$

3.2 Le modèle mathématique

En tenant compte de la fonction coût ainsi que de la fonction disponibilité décrites ci-avant, nous pouvons écrire le modèle mathématique comme suit (la transformation en un problème de maximisation est des plus facile, c'est pourquoi nous la détaillons pas) :

$$\text{Si } \alpha = 1 (\omega_1 = \omega_2 = \omega)$$

$$\begin{cases} Z_1 = \text{Max } \psi \\ Z_2 = \text{Max } - N \\ \psi \leq \frac{\omega \times \mu_1 \times N}{\mu_1 \times (N+1) + \lambda_1 \times N} \\ \psi \leq \frac{\omega \times \mu_2 \times N}{\mu_2 \times (N+1) + \lambda_2 \times N} \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} + \frac{N}{N+1} \times \frac{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \geq A_0 \\ \sum_{i=1}^2 a_i \times \lambda_i^{-p_i} + b_i \times \mu_i^{q_i} + c_i \times \omega^{r_i} \leq C_0 \\ \lambda_i \in [\lambda_{imin}, \lambda_{imax}] \\ \mu_i \in [\mu_{imin}, \mu_{imax}] \\ \omega_i \in [\omega_{imin}, \omega_{imax}] \end{cases} \quad (17)$$

- Si $(\alpha \neq 1)$

$$\begin{cases} Z_1 = \text{Max } \psi \\ Z_2 = \text{Max } -N \\ \psi \leq \frac{\omega_1 \times \mu_1 \times (1-\alpha^N)}{\mu_1 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_1 \times (1-\alpha^N)} \\ \psi \leq \frac{\omega_1 \times \mu_2 \times (1-\alpha^N)}{\mu_2 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_2 \times \alpha \times (1-\alpha^N)} \\ 1 - \frac{1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \left[\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \mu_1 \frac{\alpha^N (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} + \lambda_1 \mu_2 \frac{(1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} \right] \geq A_0 \\ \sum_{i=1}^2 a_i \times \lambda_i^{-p_i} + b_i \times \mu_i^{q_i} + c_i \times \omega^{r_i} \leq C_0 \\ \lambda_i \in [\lambda_{imin}, \lambda_{imax}] \\ \mu_i \in [\mu_{imin}, \mu_{imax}] \\ \omega_i \in [\omega_{imin}, \omega_{imax}] \end{cases}$$

(18)

4 LES METHODES D'OPTIMISATION

Dans cette section, nous présentons les deux approches de résolution du problème considéré. La première approche est une résolution mono-objective basée sur l'agrégation des deux objectifs à savoir la maximisation du taux de production du système et la minimisation de la taille du stock-tampon en un seul objectif. La deuxième méthode est un algorithme génétique multi-objectif de type NSGA-II qui a pour but de trouver l'ensemble des meilleurs compromis possible entre les deux objectifs du modèle.

4.1 La méthode par pondération

Cette approche est basée sur la transformation du modèle mathématique en un modèle mono-objectif en faisant une agrégation par pondération des deux objectifs. Afin d'obtenir une fonction objectif normalisée et d'éviter l'influence des effets d'échelles entre les deux objectifs, nous utilisons la méthode dite de normalisation qui est considérée comme la plus robuste.

$$Z_3 = \beta \times \frac{Z_1^U - Z_1}{Z_1^U - Z_1^N} + (1 - \beta) \times \frac{Z_2^U - Z_2}{Z_2^U - Z_2^N} \quad (19)$$

$\beta \in]0, 1[$ est le facteur de pondération

Z^U est le point idéal : $Z^U = [Z_1(x^{1opt}), Z_2(x^{2opt})]$

Z^N est le point Nadir : $Z_i^N = \max[Z_i(x^{1opt}), Z_i(x^{2opt})]$

x^{iopt} est la solution optimale du modèle mathématique considérant l'objectif Z_i .

Le modèle mathématique obtenu en considérant la fonction objectif décrite par l'équation (19) est les contraintes développées ci-dessus a été résolu par le solveur LINGO.

4.2 L'algorithme génétique

Nous considérons une adaptation de l'algorithme génétique multi-objectif de type NSGA-II (Non-Dominated-Sorting-Genetic-Algorithm) proposé par [Deb et al, 2002]. La procédure de cet algorithme est détaillée dans l'algorithme 1. [Deb et al, 2002] ont montré que la complexité du NSGA-II est de l'ordre de $O(MN^2)$ où M est le nombre d'objectifs et N la taille de la population. Cette complexité est induite par la procédure du tri des solutions non dominées de l'algorithme.

Algorithme 1 procédure du NSGA-II [Deb et al, 2002]

Initialiser les populations P_0, Q_0 de taille N_{pop}

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié

- $R_t = P_t \cup Q_t$ (combiner les populations parents et enfants)
- $F = \text{solutions non dominées}(R_t)$ (calcul des

différents fronts F_i de la population R_t)

- Mettre $P_{t+1} = \emptyset$ et $i = 1$

- Tant que $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$ faire

$$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i \\ i = i + 1$$

$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : (N - |P_{t+1}|)]$ (inclure dans P_{t+1} les individus de F_i)

$Q_{t+1} = \text{nouvelle population}(P_{t+1})$ (création d'une nouvelle génération en utilisant la sélection, la mutation et le croisement.)

$$Q_{t+1} \\ t = t + 1$$

4.2.1 Codage du chromosome

La population est codée en valeurs réelles. Chaque chromosome de la population définit une solution réalisable du problème considéré. Il représente la séquence des sept variables de décision (Figure 2).

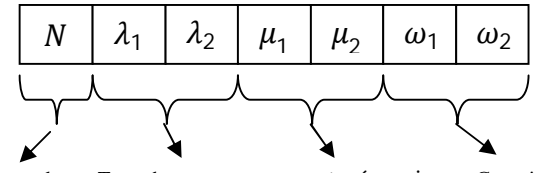


Figure 2. Codage du chromosome

4.2.2 Population initiale

Les chromosomes de la population initiale sont générés aléatoirement en vérifiant la faisabilité de chaque solution. En effet, à chaque génération la population doit être constituée de solutions réalisables et ceci en vérifiant les contraintes du modèle mathématique à chaque génération, croisement ou mutation. La population est triée en fonction des relations non-dominance comme détaillé dans l'algorithme 2.

Algorithme 2 solutions-non-dominées(P) [Deb et al, 2002]

Pour chaque $p \in P$

$S_p = \emptyset$ (S_p contient tous les individus dominés par p)

$n_p = 0$ (n_p le nombre d'individus dominés par p)

Pour chaque $q \in P$

Si $(p < q)$ alors

$S_p = S_p \cup \{q\}$

Si $(q < p)$ alors

$n_p = n_p + 1$

Si $n_p = 0$ alors

$p_{rang} = 1$

$F_1 = F_1 \cup \{p\}$

$i = 1$

Tant que $F_i \neq \emptyset$

$Q = \emptyset$

Pour chaque $p \in F_i$

Pour chaque $q \in S_p$

$n_q = n_q - 1$

Si $n_q = 0$ alors

$q_{rang} = i + 1$

$Q = Q \cup \{q\}$

$i = i + 1$

$F_i = Q$

4.2.3 Calcul de la distance de surpeuplement (crowding-distance)

Chaque solution non-dominée a un rang i_{rang} (le rang du front auquel appartient la solution i) et une distance de surpeuplement d_i . Cette dernière est définie comme étant la mesure du périmètre de plus large hyper cube qui contient le point i sans inclure une autre solution de la population [Tran, 2009]. La comparaison des distances de surpeuplement entre différents points se fait avec un opérateur de surpeuplement distance $<_n$ défini comme suit :

$$i <_n j \Leftrightarrow \begin{cases} i_{rang} < j_{rang} \\ i_{rang} = j_{rang} \text{ et } i_{distance} > j_{distance} \end{cases} \quad (20)$$

L'algorithme 3 détaille la procédure de calcul de la distance de surpeuplement proposée par [Deb et al, 2002].

Algorithme 3 calcul-distance-surpeuplement [Deb et al, 2002]

```

l = |I|
Pour chaque i
I[i]distance = 0
Pour chaque objectif m
I = tri(I, m)
I[1]distance = I[l]distance = ∞
Pour i = 2: (l - 1)
I[i]distance = I[i]distance +  $\frac{I[i+1].m - I[i-1].m}{f_m^{max} - f_m^{min}}$ 

```

4.2.4 Croisement

L'opération consiste à créer deux nouvelles solutions (enfants) en échangeant un ou plusieurs gènes de deux solutions existantes (parents). Pour se faire, on génère aléatoirement un entier dans l'intervalle [1, 7]. Ce dernier correspond à la position commune de croisement pour les deux chromosomes parents. A chaque croisement deux nouvelles solutions sont créées (Figure 3). Les nouvelles solutions sont retenues si elles vérifient les contraintes du modèle.

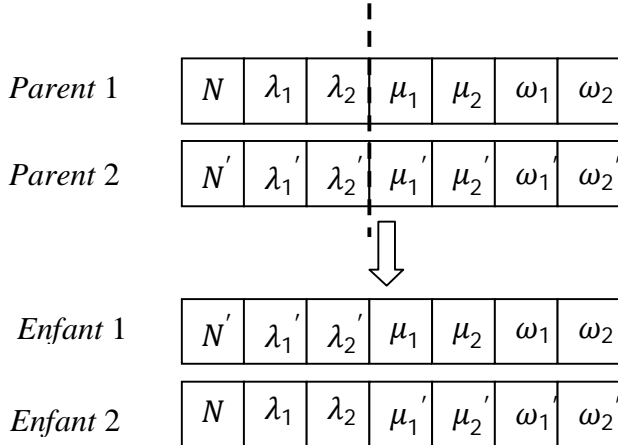


Figure 3. Croisement

4.2.5 Mutation

Tout d'abord, une position de mutation est identifiée en générant aléatoirement un entier positif dans l'intervalle [1, 7]. En suite, la variable correspondant à la position choisie est générée aléatoirement dans l'intervalle $[Var_min, Var_max]$ où Var_min et Var_max sont, respectivement, la valeur minimale et la valeur maximale que peut prendre chaque variable.

5 RESULTATS NUMERIQUES

Dans cette section nous étudions la relation entre le taux de production du système et la taille du stock tampon via des exemples numériques. Nous comparons aussi le modèle adoptée avec les modèles d'Alden et de Gershwin pour illustrer l'impact des différentes hypothèses propres à chaque modèle.

Comme exemples numériques, nous considérons les mêmes configurations utilisées par [Blumenfeld et Li, 2005]. Ces exemples consistent en deux scénarios représentatifs des états de fonctionnement des systèmes souvent rencontrés en pratiques. Le premier scénario est décrit par des pannes de courtes durées mais fréquentes et le second par des pannes de longues durées mais non fréquentes (voir Tableau 3). Le taux de production du système est décroissant en fonction du rapport λ/μ . C'est pourquoi, afin de pouvoir comparer entre les deux configurations considérées, ce dernier est constant et égal à 0.1.

Tableau 2 les données des exemples numériques

Scenarios	λ	μ	ω
Pannes courtes et fréquentes	0.05	0.5	1
Pannes longues et non fréquentes	0.005	0.05	1

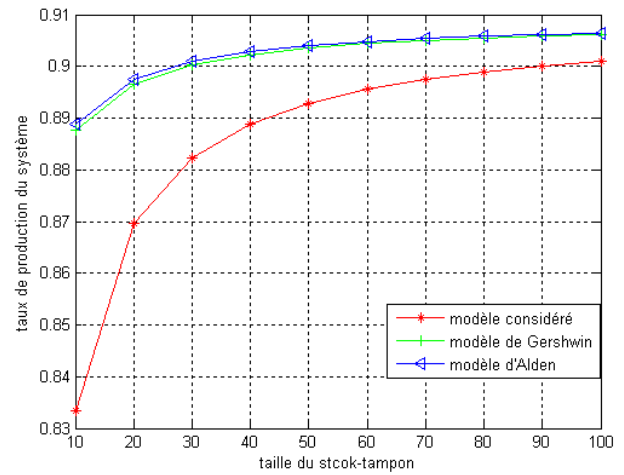


Figure 4. Comparaison des différents modèles dans le cas du scenario 1

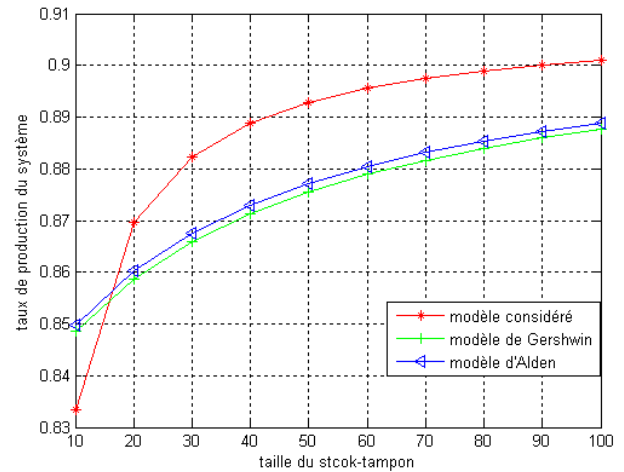


Figure 5. Comparaison des différents modèles dans le cas du scenario 2

Pour les trois modèles, le taux de production du système est croissant en fonction de la taille du stock-tampon ce qu'est prévisible. Les modèles de Gershwin et d'Alden donnent des taux de production sensiblement proches tandis que le modèle adopté affiche une différence remarquable dans les deux cas de figure considérés.

Pour le cas des pannes fréquentes et de courtes durées (voir figure 4), le taux de production du système calculé en considérant la possibilité que les deux machines peuvent être en panne est inférieur au taux de production calculé par les deux autres modèles quelque soit la taille du stock intermédiaire. Par contre, pour le deuxième cas de figure (voir figure 5), à partir d'une taille de stock $N \geq 15$ le taux de production du système du modèle adopté est supérieur aux taux de production calculés par les modèles de Gershwin et d'Alden.

Les figures 6 et 7 représentent les gaps entre les taux de production calculés par les différents modèles pour différentes tailles du stock-tampon. Dans le cas du scénario 1, le gap entre le modèle considéré et les deux autres modèles est décroissant en fonction de la taille du stock-tampon et inférieur à 7%. Pour le deuxième scénario, le gap est inférieur à 2%.

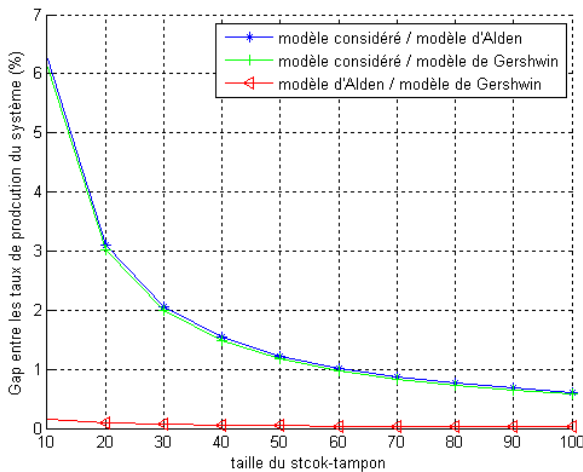


Figure 6. Les gaps entre les différents modèles dans le cas du scénario 1

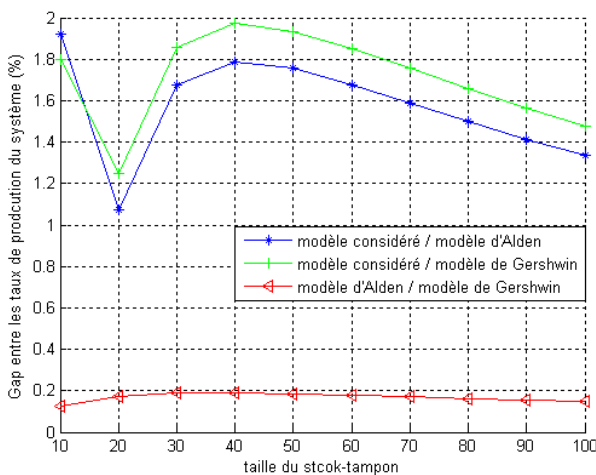


Figure 7. Les gaps entre les différents modèles dans le cas du scénario 2

Pour les deux scénarios considérés, le taux de production du système calculé par le modèle que nous avons adopté (en considérant la possibilité de la panne des deux machines) est

décroissant en fonction du rapport de capacités α quelque soit la taille du stock-tampon (voir figure 8).

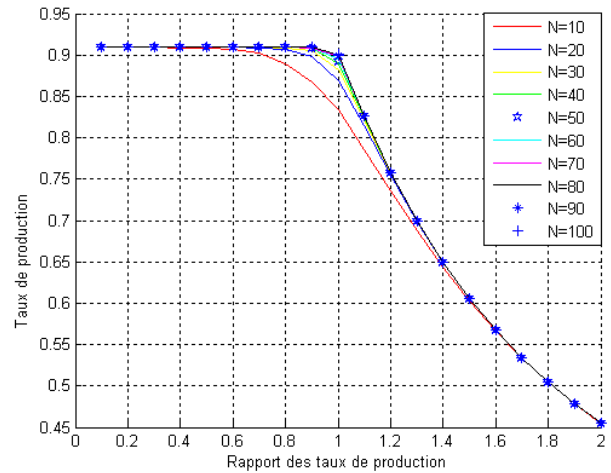


Figure 8. Le taux de production du système en fonction du rapport des capacités α

Nous présentons aussi une comparaison entre les deux approches de résolution du modèle proposé à travers un exemple d'application (voir tableau 3). La démarche consiste à résoudre le problème considéré par la méthode pondérée pour différentes valeurs de $\beta \in]0, 1[$ de manière à obtenir un front constitué de solutions supportées. La deuxième étape est de comparer ce dernier au front de solutions non dominées obtenu par le NSGA-II.

Tableau 3 Les données de l'exemple

a_i	b_i	c_i	p_i	q_i	r_i	A_0	C_0
10	10	5	1	1	1	95%	600
N		λ_i		μ_i		ω_i	
[1, 10]		[0.01, 0.05]		[0.1, 0.5]		[10, 20]	

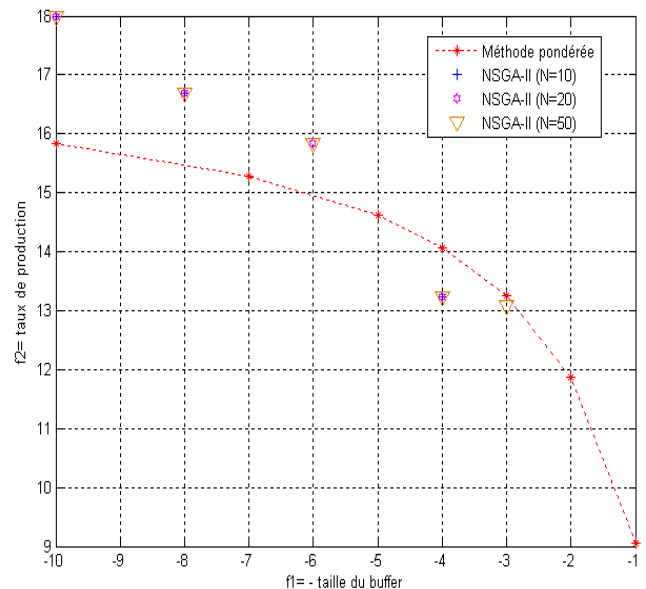


Figure 9. Comparaison entre la méthode pondérée et l'algorithme génétique

La figure 9 représente une comparaison entre l'ensemble de solutions obtenues par la méthode pondérée pour différentes valeurs du paramètre β et les fronts de Pareto (ensembles de solutions non dominées) pour différentes tailles de la population ($N_{pop} = 10, 20, 50$). Pour l'algorithme génétique on obtient relativement peu de solutions non dominées

(Tableau 4). Ceci peut être expliqué du fait qu'un des deux objectifs, à savoir les stock-tampon, soit à valeur entières. En effet pour des valeurs de $N \in [1, 10]$ nous ne pouvons avoir plus de 10 solutions non dominées quel que soit la taille de la population.

Tableau 4 Le nombre de solutions non dominées obtenues par l'algorithme génétique

Taille de la population	10	20	50
Nombre de solutions non dominées	3	4	5

6 CONCLUSION

Dans cet article, nous proposons une nouvelle formulation mathématique multi-objective du problème de la conception d'une ligne de production à deux machines et un stock-tampon. Cette dernière est basée sur l'analyse discrète des différents états possibles du stock tampon. Deux objectifs sont considérés simultanément, à savoir, la maximisation du taux de production du système et la minimisation de la taille du stock-tampon. Le modèle mathématique proposé est tout aussi valable dans le cas d'un système équilibré (même capacité de production des deux machines) que dans le cas d'un système non équilibré. Deux approches de résolution sont présentées. La première est mono-objective basée sur la résolution du modèle non linéaire obtenu par l'agrégation des deux objectifs. La seconde méthode est une adaptation d'un algorithme génétique multi-objectif de type NSGA-II.

Dans le cas où le décideur a une idée précise de l'importance de chacun des deux objectifs, l'approche par pondération est amplement suffisante pour résoudre le problème. Dans le cas contraire, l'algorithme génétique multi-objectif permet d'identifier les meilleurs compromis entre les deux objectifs.

Pour des travaux de recherche futurs, cette nouvelle formulation peut être utilisée comme un outil pour la conception et l'analyse des performances des lignes de tailles plus importantes. Nous envisageons aussi de reprendre cette formulation mathématique en remplaçant la minimisation de la taille du stock-tampon (N) par la minimisation de la taille inoccupée de ce dernier ($N - I$). Une étude comparative entre les deux modèles nous permettrait d'évaluer l'impact d'un éventuel surdimensionnement du stock.

7 REFERENCES

- Alden, J. M., (2002) Estimating performance of two workstations in series with downtime and unequal speeds, Research Publication R&D-9434, General Motors R&D Center, Warren, Michigan.
- Blumenfeld, D.E., Li, J. (2005) An Analytical formula for Throughput of a production line with identical stations and random failures, *Mathematical Problems in Engineering*, 3, pp. 293-308.
- Buzacott, J. A. Shanthikumar, J. G. (1993) *Stochastic models of manufacturing systems*, Prentice Hall, ISBN-0-13-847567-9
- Chiang, S.Y., Kuo, C.T., Meerkov, S.M. (2001) c-Bottleneck in serial production lines: identification and application. *Mathematical Problems in Engineering*, 7, pp. 543-578.
- Chiang, S.Y., Kuo, C.T., Meerkov, S.M., (2000) DT-bottleneck in serial production lines: theory and application. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, 16(5), pp. 567-580.
- Dallery, Y, Gershwin, S.B., (1992) Manufacturing flow line systems: a review of models and analytical results. *Queueing Systems*, 12, pp. 3-94.
- Deb, K., Pratap, A. Agarwal, S. Meyarivan, T., (2002) A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), pp. 182-197.
- Ebeling, C.E, (1997) *An introduction to reliability and maintainability engineering*, McGraw-Hill: USA.
- Elegbede, C., Adjallah, K., (2003) Availability allocation to repairable systems with genetic algorithm: a multi-objective formulation. *Reliability Engineering and System Safety*, 82, pp. 319-330.
- Figour, J., Jolles, B., Mascle, C., (1991) Free-transfer lines with unreliable assembly stations and small buffers. *International Journal of Production Research*, 29(5), pp. 979-996.
- Gershwin, S.B., (1987) An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking. *Operations Research*, 35, pp. 291-305.
- Gershwin, S.B., (1994) *Manufacturing Systems Engineering*, Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, ISBN-13: 978-0135606087.
- Gershwin, S.B, Schor, J.E., (2000) Efficient algorithms for buffer space allocation. *Annals of Operations research*, 93, pp. 117-144.
- Jacobs, D.A., (1993) *Improvability in production systems: theory and case studies*. PhD thesis, Dept. Elect. Eng. Comp. Sci, University of Michigan, Ann Arbor.
- Jacobs, D.A., Meerkov, S.M., (1995) A system-theoretic property of serial production lines: improvability, *International Journal of System Science*, 26, pp. 95-137.
- Kuo, C.T., (1996) *Bottlenecks in production systems: a systems approach*. PhD thesis, Dept. Elect. Eng. Comp. Sci, University of Michigan, Ann Arbor.
- Li, J, Blumenfeld, D.E, Huang, N, Alden, J.M, (2009) Throughput analysis of production systems: recent advances and future topics, *International Journal of Production Research*, 47(14), pp. 3823-3851.
- Li, J, Meerkov, S.M. (2002) Due-Time Performance of Production Systems with Markovian Machines In S.B. Gershwin, Y. Dallery, C.T. Papadopoulos, and J.M. Smith (eds.), *Analysis and Modeling of Manufacturing Systems*, pp. 221-253. Kluwer Academic.
- Lim, J.T., Meerkov, S.M., Top, F., (1990) Homogeneous, asymptotically reliable serial production lines: theory and a case study. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35, pp. 524-534.
- Marler, R., Arora, J., (2004) Survey of multi-objective optimization methods for engineering, *Structural and multidisciplinary Optimization*, 26, pp. 369-395.
- Rekiek, B, Dolgui, A, Delchambre, A, Bratcu, A, (2002) State of art of optimization methods for assembly line design. *Annual Reviews in Control*, 26, pp. 163-174.
- Songgui, S, Changjun, J, (1997) Modeling and analysis of capacitated transfer lines with unreliable machines and deterministic processing times. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 6(1), pp. 53-60.
- Songgui, S, Yao, Z.Q., (1992) The modeling and analysis of the multiple stage repairable CIMS with finite buffers. *Preprints of IFAC/IFORS/IMACS Symposium Large Scale System: Theory and Application*, Beijing, China, Août.
- Tran, K, (2009) An improved multi-objective evolutionary algorithm with adaptable parameters. *International Journal of Intelligent Systems Technologies and Application archive*, 7(2), pp. 347-369.