

Modèle bayésien d'optimisation de la disponibilité d'équipements en exploitation

BANNOUR SOUILAH, MOHAMED-SALAH OUALI

Département de Mathématiques et de Génie Industriel
CP6069, Succursale Centre-Ville, Montréal (Québec), Canada
bannour.souilah@polymtl.ca, msoulai@polymtl.ca

Résumé – Cet article traite le problème de la prise en compte des avis d'experts en maintenance dans l'optimisation de la disponibilité des équipements industriels en cours d'exploitation. Les avis sont formulés sous forme de distributions a priori sur les paramètres inconnus des modèles de taux de défaillance et de réparation d'un équipement. L'inférence bayésienne hiérarchique permet la construction des distributions a posteriori de ces mêmes paramètres en tenant compte des données de vraisemblance collectées lors de l'exploitation d'un équipement. Un modèle de stratégie de réparation minimale qui consiste à effectuer des réparations minimales en cas de défaillances et une rénovation majeure à des intervalles constants est proposé. Ce modèle considère les fonctions des taux de défaillance et de réparation actualisés avec les avis d'experts. De plus, le modèle permet de combiner les avis de plusieurs experts ayant différents domaines d'expertise. Un algorithme de résolution basé sur les techniques de simulation markovienne de type Markov Chain Monte Carlo (MCMC) est développé. Le modèle proposé ainsi que l'algorithme de résolution sont programmés sous Matlab. Des données de simulation sont utilisées afin d'illustrer le modèle bayésien proposé.

Abstract – This article deals with the problem of availability optimization of industrial equipment, which integrate maintenance expert opinions. Expert opinions are formulated as prior distributions on unknown parameters of the failure and repair hazard models. Hierarchical Bayesian inference allows building posteriori distributions of the same unknown parameters with respect to likelihood of data collected during the operation time of a given equipment. A minimum repair strategy is considered to build the availability model optimization. This strategy allows performing minimal repairs when failures occur and a major renovation at constant intervals. The model considers the failure and repair hazard models updated using expert opinions. In addition, it allows combining several expert opinions from various domains of expertise. A solving algorithm based on Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation techniques has developed and implemented using Matlab software. Simulation data are used to illustrate the proposed Bayesian optimisation model.

Mots clés – Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité, Inférence bayésienne, MCMC.

Keywords – Reliability, Maintainability, Availability, Bayesian inference, MCMC.

1 INTRODUCTION

Dans une étude de fiabilité, de maintenabilité ou de disponibilité d'un équipement en exploitation, les données de durées de vie et de maintenance, lorsqu'elles sont disponibles en quantité suffisante, sont généralement ajustées par des lois paramétriques, telles que la loi exponentielle, de Weibull, de Galton (log-normale) ou autre, à l'aide de tests d'adéquation statistique. Ces lois de probabilité caractérisent le comportement passé d'une famille d'équipements similaires et sont utilisées pour prédire le comportement futur d'un équipement donné avec un certain degré de confiance (Meeker & Escobar, 2014). Or, pour la plupart des équipements industriels, les données de fiabilité et de maintenabilité sont souvent en nombre limité, incomplètes ou encore censurées. Les méthodes classiques d'estimation des paramètres telles que les méthodes de régression ou de maximum de vraisemblance donnent des estimations biaisées (Lai & Ying,

1991). De ce fait, les fonctions statistiques caractérisant le comportement de l'équipement telles que les fonctions du taux de défaillance et du taux de réparation ne sont pas représentatives. Elles ne peuvent pas être utilisées pour optimiser, adéquatement, une stratégie de maintenance d'un équipement ou sa disponibilité au fur et à mesure de son exploitation (Peng, Feng, & Coit, 2010). Cela nécessite une mise à jour ou une actualisation périodique des fonctions caractéristiques du taux de défaillance et du taux de réparation afin de refléter les changements de comportement au cours du temps.

D'un point de vue pratique, les gestionnaires de maintenance sont généralement amenés à considérer les modèles des taux de défaillance et de réparation fournies par le constructeur de l'équipement pour planifier les interventions de maintenance et optimiser sa disponibilité. Ces modèles sont généralement établis à partir d'études de fiabilité et de maintenabilité à la conception (W. Kuo & Wan, 2007) qui considèrent un usage dit "normal",

c'est-à-dire, à l'intérieur des limites de spécifications de l'équipement. Or, les conditions d'exploitation d'un équipement peuvent varier d'une entreprise à une autre. Elles peuvent déroger de celles spécifiées par le constructeur, et ce à plusieurs niveaux. En effet, l'équipement peut être modifié pour incorporer des fonctions de production ou de sécurité non prévues par le constructeur. De plus, les interventions de maintenance peuvent changer le comportement futur de l'équipement si elles ne sont réalisées conformément aux recommandations du constructeur (maintenance imparfaite) (Wang & Pham, 2006). De ce fait, l'usage des modèles proposés par le constructeur sera désuet. Les modèles ne reflètent plus le comportement réel de l'équipement et peuvent amener l'exploitant à faire inutilement de la sur-maintenance ou de la sous-maintenance provoquant ainsi des pertes de part et d'autre. L'exploitant n'a pas le choix que de personnaliser ces modèles en fonction de l'environnement de chaque équipement et du support rendu par le département de maintenance en termes de quantité et de qualité des interventions de maintenance réellement réalisées.

Or, durant l'exploitation d'un équipement, plusieurs informations sont collectées et analysées par les experts dans le but de prendre des décisions de maintenance telles que les routines de lubrification et d'inspection, les procédures de dépannage et de réglage et les remplacements préventif et correctif des composants de l'équipement (Brown, 2004). Ces informations ne sont pas explicitement considérées dans les modèles statistiques, alors que réellement, elles sont à la base des décisions de maintenance qui affectent le comportement de l'équipement. Dans ce cas de figure, l'intégration des informations issues des avis d'experts en exploitation peuvent servir d'informations a priori sur les modèles des taux de défaillance et de réparation. Ainsi, ils peuvent mieux informer ces modèles afin de prédire adéquatement le comportement futur de l'équipement (Kourouklis, 1994).

Dans la littérature, plusieurs méthodes statistiques ont été proposées pour diminuer le biais inhérent aux méthodes classiques d'estimation des paramètres en intégrant les avis d'experts. Nous pouvons citer, à titre d'exemples, les méthodes d'augmentation des données (EM et BRM) (Moon, 1996), (L. Kuo & Yang, 2000) qui cherchent à transformer les durées de vie censurées en durées de vie complètes (de défaillance) afin de resserrer l'intervalle de confiance sur les paramètres inconnus. Plus généralement, les méthodes d'inférence bayésienne (Ma, Beck, Latham, & Pouget, 2006) permettent de considérer l'information a priori sur un paramètre inconnu pour en déduire une information a posteriori sur le même paramètre considérant les données de vraisemblance disponibles. Ces méthodes sont exploitées principalement pour effectuer des études de sensibilité locale ou de réduction des erreurs d'estimation sur les paramètres inconnus (Kelly & Smith, 2009).

L'objectif de cet article est de développer un modèle permettant de prédire le comportement futur d'un équipement et d'optimiser sa disponibilité au fur et à mesure que de nouvelles données de défaillance, de réparation et des avis d'experts seront collectées. Nous considérons l'inférence bayésienne comme outil de base pour réaliser cet objectif. Plus particulièrement, cette inférence, dite hiérarchique, considère les paramètres inconnus des modèles des taux de défaillance et de réparation comme des variables aléatoires ayant chacun sa propre distribution de probabilité. Cette distribution reflète l'avis d'un expert ou les avis combinés de plusieurs experts par rapport à un paramètre inconnu sous forme d'un a priori. Ainsi, l'inférence bayésienne permet de conjuguer

la distribution a priori avec les données de vraisemblance déjà enregistrées pour en déduire la distribution a posteriori du même paramètre. Également et moyennant des techniques avancées de simulation markovienne, en particulier, les techniques d'échantillonnage Markov Chain Monte Carlo (MCMC) (Robert & Casella, 2013), l'inférence bayésienne permet la combinaison des avis d'experts provenant de différents domaines d'expertise et ainsi actualiser les valeurs des paramètres des modèles de défaillance et de réparation de l'équipement a posteriori, et ce pour une optimisation plus adéquate de sa disponibilité en cours d'exploitation.

Par ailleurs, nous considérons un équipement multi-composant soumis à une stratégie de réparation minimale qui consiste à effectuer, périodiquement, une rénovation majeure (remise en état aussi bon que neuf) et une réparation minimale en cas de défaillance (remise en état aussi bon que vieux). Cette stratégie, initialement proposée par (Barlow & Hunter, 1960) pour optimiser les coûts de maintenance par unité de temps sur un horizon infini, sera adaptée au problème d'optimisation de la disponibilité d'un équipement tenant compte du modèle d'inférence bayésienne combinant les données de défaillance, de réparation et les avis d'experts en exploitation.

Le reste de l'article est organisé en 4 sections. La Section 2 présente une brève revue de littérature des modèles d'optimisation de la disponibilité, des méthodes d'estimation bayésienne et des algorithmes de résolution. La Section 3 présente les équations du modèle d'inférence bayésienne développé pour estimer les paramètres a posteriori des modèles de taux de défaillance et de réparation d'un équipement. Une procédure de résolution par simulation markovienne, basée sur l'algorithme de Metropolis-Hasting d'échantillonnage MCMC, est développée. Les équations du modèle d'optimisation de la disponibilité sont présentées ainsi que la stratégie optimale. La Section 4 expérimente un cas d'étude avec des données de défaillance et de réparation simulées à partir de deux distributions de probabilité distinctes. La Section 5 conclue l'article et propose les perspectives de recherche à partir des résultats obtenus.

2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Stratégies d'optimisation de la disponibilité

(Wang & Pham, 2006) dresse une revue des modèles de stratégies de maintenance pour des systèmes multi-composants ainsi que les critères d'optimisation afférents. Une grande variété de stratégies dépendantes de l'âge de l'équipement est présentée. Il s'agit de règles de décisions qui combinent diverses formes d'interventions de maintenance telles que les remplacements préventifs, correctifs, de réparation minimale, etc., avec différents niveaux d'efficacité. Elles cherchent à minimiser les coûts de maintenance encourus sur un horizon donné. (Ouali, Tadj, Yacout, & Ait-Kadi, 2011) présente, plus particulièrement, une revue des modèles de réparation minimale dont certains prennent en compte l'efficacité des interventions de maintenance tels que les modèles de (Wang & Pham, 1999, 2006), (Pham & Wang, 1996). Cette revue met l'accent sur les conditions d'optimalité des stratégies proposées par rapport aux coûts de maintenance encourus sur un horizon donné.

(Jardine & Tsang, 2013) traite deux stratégies de maintenance permettant de maximiser la disponibilité d'un équipement. La première stratégie consiste à trouver le temps optimal pour faire un remplacement préventif d'un équipement qui est sujet à des

défaillances et qu'il est remplacé par un neuf (maintenance parfaite) à chaque fois où il tombe en défaillance (stratégie de type bloc). Dans la deuxième stratégie, l'équipement est remplacé par un équipement neuf lorsqu'il tombe en défaillance mais son remplacement préventif se fait dépendamment de son âge (stratégie de type âge). (Kececioğlu, 2003) présente une stratégie qui permet de déterminer l'intervalle optimal entre deux inspections de l'équipement permettant de maximiser sa disponibilité. À chaque fois où l'équipement est inspecté et qu'il est défaillant, il sera réparé ou remplacé de telle sorte qu'il est restauré à l'état neuf (maintenance parfaite).

(Kabak, 1969) présente un modèle d'optimisation de la disponibilité d'un équipement. Les durées de vie de l'équipement sont distribuées selon une loi exponentielle et la durée de sa réparation est supposée constante. Le modèle permet de suivre la variation de la disponibilité au cours du temps et de prédire la durée moyenne de bon fonctionnement qui maximise la disponibilité de l'équipement. (Arlo & Nkproshan, 2014) présentent un modèle d'optimisation de la disponibilité pour des systèmes selon une architecture série. Les interventions de maintenance sont supposées rendre le système dans un état aussi bon que neuf (maintenance parfaite). (Zhao, 1994) traite la même problématique, mais il suppose que la maintenance est imparfaite. (Wang & Pham, 2006) traitent aussi l'optimisation de la disponibilité des systèmes en série dans le cas où ces systèmes sont sujets à des réparations imparfaites. Plusieurs autres travaux ont traité l'optimisation de la disponibilité des équipements sujets à des stratégies de maintenance imparfaite. Nous pouvons notamment citer les travaux de (Chan & Shaw, 1993; Wang & Pham, 1999).

Dans cet article, une stratégie de réparation minimale qui maximise la disponibilité d'un équipement sera élaborée dans la Section 3. Cette stratégie consiste à effectuer une réparation minimale à chaque défaillance et une rénovation majeure à intervalle fixe. Cette stratégie est particulièrement adaptée aux équipements industriels car le remplacement partiel ou en groupe de composants rajeunit localement l'équipement. La réparation majeure suppose un démontage complet de l'équipement et une remise en état de tous ses composants. Cette stratégie est adaptée celle de (Barlow & Hunter, 1960) qui optimise les coûts par unité de temps d'une stratégie de réparation minimale. Cette dernière sera modifiée pour permettre l'optimisation de la disponibilité d'un équipement. Le but est de trouver l'intervalle optimal entre deux réparations majeures consécutives. Plus particulièrement, à chaque fois où l'équipement tombe en défaillance, il subit une réparation minimale de telle sorte que son taux de défaillance reste sensiblement inchangé, le même qu'avant sa défaillance.

2.2 Méthodes d'estimation bayésienne

Contrairement aux méthodes classiques, les méthodes d'estimation bayésienne considèrent les paramètres inconnus θ du modèle statistique comme des variables aléatoires. Ces méthodes utilisent le théorème ou la règle de Bayes dans le calcul des probabilités conditionnelles entre événements. Plus particulièrement et sans perte de généralité, chaque paramètre inconnu θ sera modélisé par une densité de probabilité $\Pi(\theta)$ appelée distribution «a priori». En plus de l'information provenant des observations, l'estimation bayésienne tient compte de cette information supplémentaire provenant de la distribution a priori sur le paramètre θ . Une distribution a posteriori sur le paramètre

θ est calculée en utilisant la combinaison de la fonction de vraisemblance caractérisant les observations $\Pi(x|\theta)$ et l'information a priori $\Pi(\theta)$. L'évaluation de la distribution a posteriori $\Pi(\theta|x)$ est directement donnée par le théorème de Bayes comme suit :

$$\Pi(\theta|x) = \frac{\Pi(x|\theta) \cdot \Pi(\theta)}{\int \Pi(x|\theta) \cdot \Pi(\theta) d\theta} \quad (1)$$

Il est facile de remarquer que la distribution a posteriori est proportionnelle au numérateur de l'équation (1). Cette propriété permet de simplifier l'évaluation de distribution a posteriori.

L'estimation bayésienne a été fortement utilisée au cours des dernières années dans plusieurs disciplines. Cette croissance est essentiellement due aux développements des méthodes de simulation qui permettent d'évaluer la distribution a posteriori lorsque la forme analytique de la distribution a posteriori n'est pas explicite ou connue. En effet, dans la plupart des situations, il n'est pas toujours évident de connaître la forme analytique de la distribution a posteriori si la fonction de vraisemblance et la distribution a priori ne sont pas conjuguées. Par contre, si la fonction de vraisemblance est conjuguée avec la distribution a priori, la distribution a posteriori sera de même forme que celle de la distribution a priori. La démonstration de la forme analytique de la distribution a posteriori peut être consultée dans (Berger, 2013).

Lorsque la forme analytique de la distribution a posteriori n'est pas simple, les méthodes de simulation sont mises à contribution pour générer un échantillon suivant la distribution a posteriori. Les algorithmes de simulation de type Markov Chain Monte Carlo (MCMC) les plus répandus dans la littérature sont celui de Gibbs (Gelfand & Smith, 1990) et celui de Metropolis-Hastings (Hastings, 1970). Les méthodes des deux algorithmes de résolution sont discutées dans les sous sections suivantes.

2.3 Algorithmes de résolution

L'algorithme de Metropolis-Hastings est une généralisation de la technique de (Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller, & Teller, 1953) qui a été utilisée dans la physique. Cet algorithme est basé sur la simulation de chaînes de Markov. Il permet d'obtenir un état de la chaîne à l'état $t+1$ en simulant un candidat Y à partir d'une distribution dite instrumentale $q(\cdot|X_t)$. Il est indispensable de noter que ce nouveau candidat dépend uniquement de l'état précédent. La loi instrumentale doit satisfaire des conditions dites de régularité (Roberts, 1996). En effet, cette loi doit être irréductible et apériodique (Chib & Greenberg, 1995). L'irréductibilité veut dire qu'il est possible d'atteindre n'importe quel point de la distribution a posteriori avec une probabilité non nulle. L'apériodicité assure que la chaîne n'oscille pas entre deux états différents. Généralement, ces deux conditions sont satisfaites si le support de la loi instrumentale contient celui de la distribution a posteriori. Le nouveau candidat Y est accepté avec une probabilité donnée par :

$$\alpha(X_t, Y) = \min \left(1, \frac{\Pi(Y) \cdot q(X_t|Y)}{\Pi(X_t) \cdot q(Y|X_t)} \right) \quad (2)$$

Si le point Y n'est pas accepté, alors la chaîne ne change pas et $X_{t+1} = X_t$.

L'algorithme de Gibbs a été développé essentiellement par (Geman & Geman, 1984) et a été appliqué dans le traitement

d'image. Il a été ensuite introduit dans l'analyse statistique des données à travers les articles de (Gelfand, Hills, Racine-Poon, & Smith, 1990; Gelfand & Smith, 1990). Il peut être considéré comme un cas particulier de l'algorithme de Metropolis-Hastings (Gilks, Richardson, & Spiegelhalter, 1996; Roberts, 1996). Cependant, il existe deux différences. En effet, dans l'algorithme de Gibbs, le nouveau candidat est toujours accepté et il faut connaître toutes les distributions conditionnelles.

Pour lever ces restrictions dans la résolution du modèle bayésien d'optimisation de la disponibilité proposé, nous allons exploiter ultérieurement l'algorithme de Metropolis-Hastings.

3 MODELE DE DISPONIBILITE BAYESIENNE

3.1 Stratégie d'optimisation de la disponibilité

Nous considérons un équipement soumis à une réparation minimale à chaque défaillance et à une rénovation majeure à chaque période t_p . La stratégie optimale consiste à trouver l'intervalle t_p^* qui maximise la disponibilité de l'équipement ou, d'une manière équivalente, minimise son indisponibilité. En effet, plus le nombre de rénovations majeures augmente, plus le temps d'arrêt de l'équipement augmente suite à ces rénovations. En contrepartie, le nombre d'arrêts suite à des réparations minimales de l'équipement diminue si la fréquence de rénovations majeures augmente. Nous supposons que les réparations minimales remettent l'équipement dans un état opérationnel sans toutefois augmenter sa performance. Cela suppose qu'il est remis à son état juste avant sa défaillance. Ainsi, le taux de défaillance $\lambda(t)$ reste inchangé. La figure 1 présente cette règle de décision tels que : T_f désigne le temps moyen nécessaire pour effectuer une réparation minimale et T_p le temps moyen nécessaire pour effectuer une rénovation majeure de l'équipement.

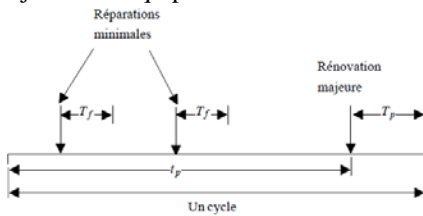


Figure 1. Illustration de la stratégie de réparation minimale

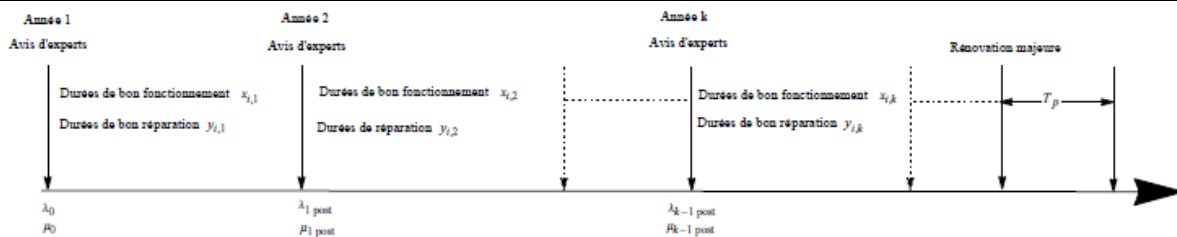


Figure 2. Stratégie de réparation minimale prenant en compte les avis d'experts

Pour développer le modèle d'optimisation de la disponibilité prenant en compte les avis d'experts sur les paramètres inconnus λ et μ , les notations suivantes seront considérées :

- k : indice désignant la période (ex. année) de l'étude $k \in \{1, \dots, K\}$
- n_k : nombre de défaillances durant la période k
- $x_{i,k}$: durées de bon fonctionnement durant k ($i \in \{1, \dots, n_k\}$)

Le temps d'arrêt total par unité de temps $D(t_p)$, pour un intervalle de longueur t_p entre deux rénovations majeures, représente l'indisponibilité instantanée de l'équipement par unité de temps. Elle est donnée par :

$$D(t_p) = \frac{H(t_p) \cdot T_f + T_p}{t_p + T_p} \quad (3)$$

Où $H(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t) dt$ représente le cumul du nombre de défaillances dans l'intervalle $[0, t_p]$. Une condition suffisante pour trouver un minimum unique t_p^* de la fonction $D(t_p)$ est d'avoir un taux de défaillance $\lambda(t)$ strictement croissant avec bien sûr $T_p \gg T_f$.

La formulation du modèle d'optimisation de la disponibilité est donnée de manière équivalente par : $A(t_p) = 1 - D(t_p)$.

3.2 Stratégie de disponibilité intégrant les avis d'experts

Dans cette partie, nous supposons que nous avons un équipement neuf qui est mis en fonctionnement à l'instant $t = 0$. Le fournisseur de l'équipement fournit un taux de défaillance de base de l'équipement λ_0 et un taux de réparation de base μ_0 . Nous supposons également que les durées de bon fonctionnement de l'équipement ainsi que les durées de réparation suivent respectivement des lois exponentielles de paramètres λ et μ . Ces durées sont indépendantes.

Au début de chaque période k , des experts en fiabilité et en maintenabilité donnent respectivement leurs avis sur les paramètres inconnus λ et μ . L'objectif est de trouver une stratégie optimale de maintenance permettant d'optimiser la disponibilité de l'équipement. Le modèle décrit par l'équation (3) sera modifié pour tenir compte des avis d'experts enregistrés au début de chaque période k . En effet, ce modèle suppose que la forme du taux de défaillance $\lambda(t)$ est connue. Or, ce taux peut varier d'une période d'observation à l'autre dépendant des avis d'experts consultés. Il est à noter que le taux de défaillance est constant par période d'observation (processus de Poisson homogène). La Figure 2 explique la stratégie proposée.

- $y_{i,k}$: durées de réparation durant k ($i \in \{1, \dots, n_k\}$)
- h : longueur de la période k , $h = \sum_{i=1}^{n_k} (x_{i,k} + y_{i,k}) \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}$
- $\bar{\lambda}_{\text{post},k}$: moyenne a posteriori du λ de la période k
- $\bar{\mu}_{\text{post},k}$: moyenne a posteriori du μ de la période k

L'optimisation de l'indisponibilité de l'équipement se fait au début de chaque période k de la façon suivante.

3.2.1 Début de la période $k = 1$

Nous allons prendre les avis d'experts en fiabilité et en maintenabilité sur les paramètres λ et μ . Comme la seule information disponible durant cette période provient du constructeur de l'équipement $\lambda_1(t) = \lambda_0$ et $\mu_1 = \mu_0$. Le modèle d'indisponibilité pour cette période s'écrit comme suit :

$$D_1(t_p) = \frac{\frac{1}{\mu_0} \int_0^{t_p} \lambda_1(t) dt + T_p}{t_p + T_p} = \frac{\lambda_0 \cdot t_p + T_p}{t_p + T_p} \quad (4)$$

Nous remarquons que la fonction $D_1(t_p)$ est strictement décroissante, donc $t_{p,1}^* \rightarrow +\infty$. Ceci veut dire qu'il n'est pas rentable de faire une rénovation majeure de l'équipement (aucune amélioration de la disponibilité). L'indisponibilité minimale sera égale à la limite de $D_1(t_p) = \frac{\lambda_0}{\mu_0}$ lorsque $t_p \rightarrow +\infty$.

3.2.2 Début de la période $k = 2$

Nous prenons les avis d'experts sur les paramètres λ et μ . Nous calculons $\bar{\lambda}_{post,1}$ et $\bar{\mu}_{post,1}$ en utilisant les données de bon fonctionnement, de réparation et les avis d'experts pris au début de la période $k = 1$. Comme nous avons uniquement 2 valeurs de λ , soient λ_0 et $\bar{\lambda}_{post,1}$, nous supposons que $\lambda_2(t)$ à partir de la période $k = 2$ et jusqu'à la rénovation majeure de l'équipement est linéaire en fonction du temps t :

$$\lambda_2(t) = \lambda_0 + \frac{\bar{\lambda}_{post,1} - \lambda_0}{h} \cdot t \quad \forall t > h \quad (5)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$D_2(t_p) = \frac{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h \lambda_1(t) dt + \frac{1}{\mu_1} \int_h^{t_p} \lambda_2(t) dt + T_p}{t_p + T_p} \quad (6)$$

Il reste à déterminer la périodicité optimale $t_{p,2}^*$, si elle existe, qui minimise l'indisponibilité lorsque $t_p \rightarrow +\infty$.

3.2.3 Début de la période $k \geq 3$

Nous prenons les avis d'experts sur les paramètres λ et μ . Nous évaluons ensuite $\bar{\lambda}_{post,k-1}$ et $\bar{\mu}_{post,k-1}$ en utilisant les données de bon fonctionnement, de réparation et les avis d'experts formulés au début de l'année $k - 1$. Nous supposons que le taux de défaillance prendra une forme non-linéaire $\lambda_k(t) = a_k + b_k t^{c_k}$ à partir de la période k ($k \geq 3$) et jusqu'à la réparation majeure. Le calcul du vecteur (a_k, b_k, c_k) est possible en utilisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda(t=0) = \lambda_0 \\ \lambda(t=h) = \bar{\lambda}_{post,1} \\ \lambda(t=2h) = \bar{\lambda}_{post,2} \\ \vdots \\ \lambda(t=(k-1)h) = \bar{\lambda}_{post,k-1} \end{cases} \quad (7)$$

Ainsi, le temps total d'arrêt de l'équipement par unité de temps prend le modèle suivant :

$$D_k(t_p) = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\mu_{s-1}} \int_{(s-1)h}^{sh} \lambda_s(t) dt \right) + \frac{1}{\mu_{k-1}} \int_{(k-1)h}^{t_p} \lambda_k(t) dt + T_p}{t_p + T_p} \quad (8)$$

Nous minimisons ensuite la fonction $D_k(t_p)$ et nous cherchons $t_{p,k}^*$ qui minimise l'indisponibilité lorsque $t_p \rightarrow +\infty$.

Afin de pouvoir actualiser les valeurs des paramètres a posteriori, nous aurons besoin du modèle de distribution de la vraisemblance des données de disponibilité que nous allons déterminer dans ce qui suit.

3.3 Modèle de vraisemblance associé à la disponibilité

Nous supposons que, pendant une période k donnée, nous avons n_k durées de bon fonctionnement $x_{i,k}$ dont la variable aléatoire $X \sim Exp(\lambda)$ et n_k durées de réparation $y_{i,k}$ dont $Y \sim Exp(\mu)$.

Alors, la variable aléatoire $Z = \frac{X}{X+Y}$, caractérisant les différents

les valeurs $d_{i,k}$ obtenues de la disponibilité au cours d'une période

k , $d_{i,k} = \frac{x_{i,k}}{x_{i,k} + y_{i,k}} \quad \forall i \in \{1, \dots, n_k\}$, suit une distribution de

probabilité ayant la fonction de densité suivante :

$$f_z(z) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda z + \mu - \mu z)^2} \quad \forall 0 < z < 1 \quad (9)$$

La distribution $f_z(z)$ va servir pour construire la fonction de vraisemblance sur les données de disponibilité afin de procéder aux calculs des valeurs a posteriori des paramètres λ et μ nécessaires pour minimiser l'indisponibilité.

3.4 Distributions a priori sur λ et μ

Au début de la période d'intérêt, nous supposons que deux groupes d'experts indépendants sont consultés pour exprimer leurs avis sur λ et μ :

- N_1 experts indépendants en fiabilité donnent leurs avis sur λ ($N_1 \geq 1$). Chaque expert j donne son estimation des bornes minimale $\lambda_{min,j}$ et maximale $\lambda_{max,j}$ du paramètre λ . Nous supposons que toutes les distributions a priori suivent une loi Bêta $B(a_j, b_j)$ dont les paramètres a_j et b_j sont déterminés en solvant le système d'équations (10) où $F_j(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi $B(a_j, b_j)$ et p désigne un niveau de confiance égal à 0,05.

$$\begin{cases} F_j(\lambda_{min,j}, a_j, b_j) = p \\ F_j(\lambda_{max,j}, a_j, b_j) = 1 - p \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, N_1\} \quad (10)$$

- N_2 experts indépendants en maintenabilité expriment leurs avis sur μ ($N_2 \geq 1$). Chaque expert \mathcal{G} donne son estimation des bornes $\mu_{min,j}$ et maximale $\mu_{max,j}$ du paramètre μ . La distribution a priori sur μ , pour chaque expert \mathcal{G} , est modélisée par une loi normale $N(m_{\mathcal{G}}, \sigma_{\mathcal{G}}^2)$. La détermination des paramètres $m_{\mathcal{G}}$ et $\sigma_{\mathcal{G}}^2$ est faite en solvant le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(1 + \left(\frac{\mu_{\min, v} - m_v}{\sqrt{2}\sigma_v} \right) \right) \right) = 0.05 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(1 + \left(\frac{\mu_{\max, v} - m_v}{\sqrt{2}\sigma_v} \right) \right) \right) = 0.95 \end{cases} \quad \forall v \in \{1..N_2\} \quad (11)$$

Soient les quatre variables aléatoires suivantes :

- Λ : variable continue désignant le taux λ .
- M : variable continue désignant le taux μ .
- J : variable discrète désignant l'expert en fiabilité le plus performant.
- V : variable discrète désignant l'expert en maintenabilité le plus performant.

Les fonctions de masse des variables J et V sont données respectivement par les équations ci-dessous :

$$P(J = j) = \frac{1}{N_1} \quad \forall j \in \{1, \dots, N_1\} \quad (12)$$

$$P(V = v) = \frac{1}{N_2} \quad \forall v \in \{1, \dots, N_2\} \quad (13)$$

La distribution a priori sur λ pour chaque expert j en fiabilité sera exprimée par la fonction de densité conditionnelle de λ étant donné que $J = j$. L'expression de cette distribution est donnée par l'équation (12). La distribution a priori pour chaque expert \mathcal{G} en maintenabilité sera exprimée par la fonction de densité conditionnelle de M étant donné que $V = \mathcal{G}$. Son expression est donnée par l'équation (13).

$$\Pi_{\Lambda|J}(\lambda|j) = \frac{\Gamma(a_j + b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b_j)} \lambda^{a_j-1} (1-\lambda)^{b_j-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(\lambda) \quad \forall j \in \{1, \dots, N_1\} \quad (14)$$

$$\Pi_{M|V}(\mu|v) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - m_v}{\sigma_v}\right)^2\right) \quad \forall v \in \{1, \dots, N_2\} \quad (15)$$

Les distributions a priori sur les paramètres λ et μ sont déterminées en appliquant l'axiome des probabilités totales. Leurs expressions sont données par le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \Pi_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \frac{\Gamma(a_j + b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b_j)} \lambda^{a_j-1} (1-\lambda)^{b_j-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(\lambda) \\ \Pi_M(\mu) = \frac{1}{N_2} \sum_{v=1}^{N_2} \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - m_v}{\sigma_v}\right)^2\right) \end{cases} \quad (16)$$

3.5 Distributions a posteriori sur λ et μ

Notons par Θ le vecteur aléatoire mixte $\Theta = (\Lambda, M, J, V)$. Nous allons construire la distribution a posteriori sur le vecteur $\theta = (\lambda, \mu, j, \mathcal{G})$. L'inférence bayésienne sera appliquée sur les n données de disponibilités que nous notons dans la suite par d . Le théorème de Bayes permet d'écrire la distribution a posteriori sur le vecteur $\theta = (\lambda, \mu, j, \mathcal{G})$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{\Theta|D}(\theta|d) &= \frac{\Pi_{D|\Theta}(d|\theta)\Pi_{\Theta}(\theta)}{\Pi_D(d)} \\ &= \frac{\Pi_{D|\Theta}(d|\theta)\Pi_{\Theta}(\theta)}{\int_0^{+\infty} \Pi_{D|\Theta}(d|\theta)\Pi_{\Theta}(\theta)d\theta} \end{aligned} \quad (17)$$

Comme le dénominateur de l'équation (14) est une constante de normalisation et est indépendante de vecteur $\theta = (\lambda, \mu, j, \mathcal{G})$, la distribution a posteriori sera proportionnelle au numérateur de cette équation. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Pi_{\Theta|D}(\theta|d) &\propto \Pi_{D|\Theta}(d|\theta)\Pi_{\Theta}(\theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda \mu}{(\lambda d_i + \mu - \mu d_i)^2} \right) \Pi_{\Lambda, J}(\lambda, j) \cdot \Pi_{M, V}(\mu, v) \end{aligned} \quad (18)$$

L'application de l'algorithme MCMC de Metropolis-Hasting permet de déterminer les distributions a posteriori des paramètres λ et μ ainsi que les fonctions de masse des variables J et V . La procédure de cet algorithme appliquée à l'équation (18) est la suivante :

Étape 1. Initialiser $[\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, j^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}]$

Étape 2. Pour $l = 1$ à R

- Générer $u \sim U_{[0,1]}$
- Générer $\theta^* \sim q(\theta^*|\theta^{(l)})$, $q(\theta^*|\theta^{(l)})$ étant la loi expérimentale.
- Si $u < A$ alors $\theta^{(l+1)} = \theta^*$ sinon $\theta^{(l+1)} = \theta^{(l)}$ avec A désigne le ratio d'acceptation et donné par :

$$A = \min\left(1, \frac{\Pi_{\Theta|D}(\theta^*|d)q(\theta^{(l)}|\theta^*)}{\Pi_{\Theta|D}(\theta^{(l)}|d)q(\theta^*|\theta^{(l)})}\right) \quad (19)$$

La loi instrumentale $q(\theta^*|\theta^{(l)})$ permet, à chaque itération l , de générer λ^* et μ^* respectivement à partir des lois normales $N(\lambda^{(l)}, \sigma_1^2)$ et $N(\mu^{(l)}, \sigma_2^2)$. De plus, un expert en fiabilité sera choisi aléatoirement parmi les N_1 experts avec une probabilité $1/N_1$. De la même manière, un expert en maintenabilité sera sélectionné avec une probabilité $1/N_2$. En définitive, la loi instrumentale s'écrit de la façon suivante :

$$q(\theta^*|\theta^{(l)}) = \frac{1}{2\pi N_1 N_2 \sigma_1 \sigma_2} \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda^{(l)})^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(\mu - \mu^{(l)})^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (20)$$

Ainsi, le ratio d'acceptation A s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \min\left(1, \frac{\Pi_{\Theta|D}(\theta^*|d)}{\Pi_{\Theta|D}(\theta^{(l)}|d)}\right) \\ &= \min\left(1, \frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^* \mu^*}{(\lambda^* d_i + \mu^* - \mu^* d_i)^2} \right) \cdot \Pi_{\Lambda|J}(\lambda^*|j^*) \cdot \Pi_{M|V}(\mu^*|v^*)}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{(l)} \mu^{(l)}}{(\lambda^{(l)} d_i + \mu^{(l)} - \mu^{(l)} d_i)^2} \right) \cdot \Pi_{\Lambda|J}(\lambda^{(l)}|j^{(l)}) \cdot \Pi_{M|V}(\mu^{(l)}|v^{(l)})}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

Les statistiques a posteriori des paramètres λ et μ sont données par le système (22). Les fonctions de masse a posteriori des variables J et V sont données par le système (23).

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_{post} = \frac{1}{R} \sum_{l=1}^R \lambda^{(l)} \\ \sigma_{\lambda, post} = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{l=1}^R (\lambda^{(l)} - \bar{\lambda}_{post})^2} \\ \bar{\mu}_{post} = \frac{1}{R} \sum_{l=1}^R \mu^{(l)} \\ \sigma_{\mu, post} = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{l=1}^R (\mu^{(l)} - \bar{\mu}_{post})^2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} P_{post}(J = j) = \frac{1}{R} \sum_{l=1}^R \mathbb{1}_{\{j^{(l)}=j\}} \quad \forall j \in \{1, \dots, N_1\} \\ P_{post}(V = v) = \frac{1}{R} \sum_{l=1}^R \mathbb{1}_{\{v^{(l)}=v\}} \quad \forall v \in \{1, \dots, N_2\} \end{cases} \quad (23)$$

Le programme permettant de déterminer des quantités statistiques a posteriori des 2 systèmes d'équations (22) et (23) est implémenté sous le logiciel *Matlab*.

4 EXEMPLE ILLUSTRATIF

Afin d'illustrer le modèle bayésienne proposé pour l'optimisation de la disponibilité d'un équipement au cours de son exploitation, nous avons simulé des durées de bon fonctionnement et de réparation d'un équipement pour $K = 10$ périodes (années). Des avis d'experts en fiabilité et en maintenabilité ont été introduits au début de chaque année pour pouvoir appliquer l'inférence bayésienne sur les taux de défaillance et de réparation. Nous supposons que le taux de défaillance de base du constructeur de l'équipement est égal à $\lambda_0 = 0,4$ défaillance par semaine et celui de réparation est égal à $\mu_0 = 10$ réparations par semaine. Nous considérons dans cet exemple 3 experts en fiabilité et 2 experts en maintenabilité. En se référant la sous-section 3.2, l'optimisation de la disponibilité se déroulera période par période comme suit.

4.1 Année $k = 1$

Les tableaux 1 et 2 donnent, respectivement, les avis des 3 experts en fiabilité et des 2 experts en maintenabilité.

Tableau 1 : Avis des 3 experts en fiabilité

Expert (j)	$\lambda_{\min,j}$	$\lambda_{\max,j}$	a_j	b_j
1	0,4	0,44	690,83	954,25
2	0,41	0,47	321,31	409,08
3	0,46	0,51	519,76	551,94

Tableau 2 : Avis des 2 experts en maintenabilité

Expert (v)	$\mu_{\min,v}$	$\mu_{\max,v}$	m_v	σ_v
1	8	11	9,50	0,91
2	9	13,5	11,25	1,37

Comme au début de la première année, le taux de défaillance de l'équipement va être constant et égal au taux de base du constructeur $\lambda_0 = 0,4$. En prenant ainsi un taux de défaillance constant, il n'est pas rentable de faire une rénovation majeure de l'équipement et que la disponibilité optimale est égale à $1 - \lambda_0 / \mu_0 = 0,96$.

4.2 Année $k = 2$

Au début de la deuxième année (fin de la première année), une vraisemblance sur les données de bon fonctionnement et de réparation est constituée. Nous pouvons ainsi construire les données de disponibilité. Le Tableau 3 donne un échantillon des données de vraisemblance de la première année. Les données de disponibilité seront combinées avec les avis d'experts pris au début de la première année (Tableaux 1 et 2) pour procéder à l'inférence bayésienne et déterminer les distributions a postériori sur les paramètres λ et μ . Au début de la deuxième année, des avis d'experts en fiabilité et en maintenance seront également pris sur les paramètres λ et μ .

Tableau 3 : Extrait des données de vraisemblance

Durées de bon fonctionnement (en semaines)	Durées de réparation (en semaines)	Disponibilité
0,6045	0,00570	0,9907
1,3086	0,00217	0,9983
...
...
0,0721	0,05276	0,5776
6,3209	0,03705	0,9942

Les statistiques a postériori sur les paramètres λ et μ sont

résumées dans le Tableau 4. La Figure 3 illustre le déroulement de l'échantillonnage pour λ et μ . Un classement des avis d'experts en fiabilité et maintenabilité peut être également établi. Ce classement est donné par les fonctions de masse a postériori des variables aléatoires J et V et est résumé dans les Tableaux 5 et 6.

Tableau 4 : Statistiques a postériori sur λ et μ .

$\bar{\lambda}_{post,1}$	$\sigma_{\lambda,post}$	$\bar{\mu}_{post,1}$	$\sigma_{\mu,post}$
0,41	0,03	10,6	1,27

Tableau 5 : Fonction de masse pour la variable J .

Expert (j)	$P_{post}(J = j)$
1	0,3594
2	0,3546
3	0,2860

Tableau 6 : Fonction de masse pour la variable V .

Expert (v)	$P_{post}(V = v)$
1	0,4239
2	0,5761

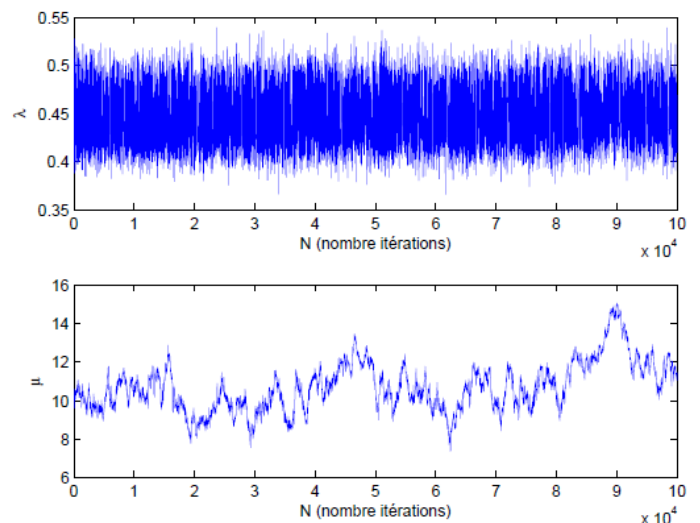


Figure 3. Déroulement de l'échantillonnage pour λ et μ .

4.3 Année k ($k \geq 3$)

Au début de l'année k ($k \geq 3$), des experts en fiabilité et en maintenabilité donnent leurs avis sur les taux de défaillance et de réparation. Les données de vraisemblance de l'année $k - 1$ sont combinées avec les avis d'experts pris au début de l'année $k - 1$ pour permettre de calculer les distributions a postériori sur les paramètres λ et μ . Le taux de défaillance est modélisé à l'aide de l'équation par la forme non-linéaire $\lambda_k(t) = a_k + b_k t^{c_k}$ et la maximisation de la disponibilité sera faite en utilisant la procédure de la sous-section 3.2.3.

Afin de pouvoir analyser les résultats, nous définissons la durée résiduelle de l'équipement entre l'année d'évaluation k et le moment de la rénovation majeure optimal donné par $t_{p,k}^*$ comme suit :

$$D_{résiduelle} = t_{p,k}^* - (k - 1) \cdot h \quad (24)$$

où $h = 52$ semaines (nombre de semaines de l'année).

Cette durée résiduelle constitue, en fait, un critère de décision ou un moyen d'action, qui permettra d'ajuster les interventions de

maintenance. Si cette durée résiduelle est longue, cela veut dire que les paramètres λ et μ de la disponibilité sont sous contrôles. C'est-à-dire, les interventions de maintenance planifiées durant et après la période d'études permettent de garder l'équipement avec des performances proches de celles définies par le constructeur. Plus la durée résiduelle est courte, plus l'équipement se détériore par rapport aux spécifications du constructeur. Cela veut dire que les experts doivent réagir avec un plan d'intervention plus agressif afin de contrer la détérioration de l'équipement.

Le Tableau 7 résume statistiques a posteriori sur les paramètres inconnus pour 10 années d'études, les périodicités optimales au début de chaque année d'étude, les disponibilités optimales ainsi que les durées résiduelles. Il est clair que lorsque le taux de défaillance a posteriori dépasse le taux initial du constructeur, comme par exemples durant les années 5, 8 et 10, la durée résiduelle diminue. La Figure 4 montre l'allure du taux de défaillance sur l'horizon de 10 années. Nous remarquons que la tendance générale du taux de défaillance est l'augmentation. Les cassures de la courbe au début de chaque année résultent des avis d'experts qui changent la tendance du taux de défaillance à travers l'estimation a posteriori du paramètre λ .

Tableau 7 : Maximisation de la disponibilité de l'équipement

Année (k)	$\bar{\lambda}_{post,k}$	$\bar{\mu}_{post,k}$	$t_{p,k}^*$	$1 - D_k(t_{p,k}^*)$	$D_{résiduelle}$
1	0,41	10,6	$+\infty$	0,960000	$+\infty$
2	0,43	11,2	918,81	0,945595	866,81
3	0,45	12,6	568,52	0,940053	464,51
4	0,48	11,2	644,90	0,944628	488,90
5	0,5	12,3	494,85	0,938749	286,85
6	0,53	11,9	598,06	0,942494	338,06
7	0,58	12,5	580,88	0,941778	268,88
8	0,61	13	554,13	0,941697	190,12
9	0,64	12,1	583,44	0,942318	167,44
10	0,69	11,4	545,91	0,941795	77,90

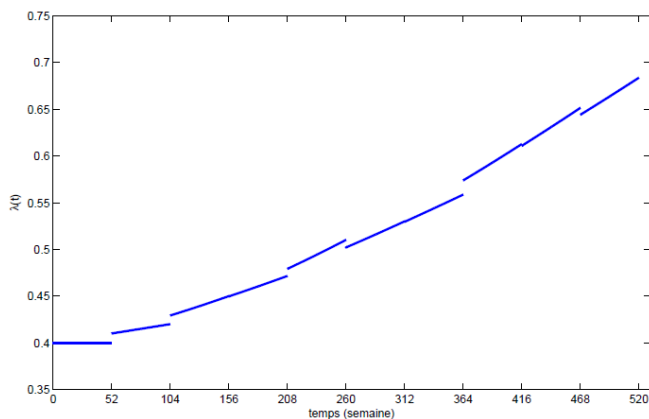


Figure 5. Allure du taux de défaillance

5 CONCLUSION

L'article développe un modèle permettant de prédire le comportement futur des taux de défaillance et de réparation d'un équipement et d'optimiser sa disponibilité au fur et à mesure que de nouvelles données de défaillance, de réparation et des avis d'experts seront collectées. L'actualisation des taux de défaillance et de réparation basée sur l'inférence bayésienne hiérarchique. Cette inférence considère les paramètres inconnus des modèles des taux de défaillance et de réparation comme des variables aléatoires ayant chacun sa propre distribution de probabilité a priori. Ainsi, l'inférence bayésienne permet de conjuguer la

distribution a priori avec les données de vraisemblance déjà enregistrées pour en déduire la distribution a posteriori du même paramètre. Comme les distributions a posteriori n'ont pas une forme explicite, un algorithme de simulation markovienne basée les techniques d'échantillonnage Markov Chain Monte Carlo (MCMC) est développé. L'inférence bayésienne permet la combinaison des avis d'experts provenant de différents domaines d'expertise, en particulier du domaine de la fiabilité et de la maintenabilité, et ainsi actualiser les valeurs des paramètres des modèles de défaillance et de réparation de l'équipement a posteriori.

Par ailleurs, nous avons considérons des équipements multi-composants soumis à une stratégie de réparation minimale. Cette stratégie cherche à maximiser la disponibilité tenant compte du modèle d'inférence bayésienne combinant les données de défaillance, de réparation et les avis d'experts en exploitation.

Le modèle disponibilité proposé présente un avantage important du fait qu'il reflète les décisions prises par les experts en fiabilité et en maintenance tout au long du cycle de vie d'un équipement. Le modèle d'optimisation est tout à fait personnalisable, il permet de gérer équipement par équipement et ainsi refléter les décisions prises pour chacun au cours de son exploitation. Cependant, ce modèle présente une limitation, celle de considérer un horizon infini pour établir la périodicité optimale. Un modèle d'optimisation de la disponibilité sur un horizon fini pourrait être développé. En pratique, ce modèle sera plus proche de la gestion réelle du cycle de vie des équipements industriels ; une gestion basée sur le principe de durabilité économique des équipements.

De nombreux aspects de ce projet peuvent être améliorés. Tout d'abord, une étude de sensibilité peut être traitée pour permettre trouver le lien entre l'incertitude des experts et les distributions a posteriori sur les paramètres inconnus. Cela pourrait-être utile pour mesurer l'erreur de prédiction des distributions a posteriori par rapport aux incertitudes des experts. Il est tout à fait possible d'évaluer la qualité d'ajustement du modèle bayésien proposé à l'aide, par exemples, des deux critères d'ajustement les plus connus : le DIC (Deviance Information Criterion) et le Bayesian p-value.

6 REFERENCES

- Arlo, R. A. E., & Nkproshan, F. (2014). *Availability theory for multicomponent systems*. Paper presented at the Multivariate Analysis—III: Proceedings of the Third International Symposium on Multivariate Analysis Held at Wright State University, Dayton, Ohio, June 19-24, 1972.
- Barlow, R., & Hunter, L. (1960). Optimum preventive maintenance policies. *Operations research*, 8(1), 90-100.
- Berger, J. O. (2013). *Statistical decision theory and Bayesian analysis*: Springer Science & Business Media.
- Brown, R. E. (2004). *Failure rate modeling using equipment inspection data*. Paper presented at the Power Engineering Society General Meeting, 2004. IEEE.
- Chan, J.-K., & Shaw, L. (1993). Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance. *Reliability, IEEE Transactions on*, 42(4), 566-571.
- Chib, S., & Greenberg, E. (1995). Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The American statistician*, 49(4), 327-335.
- Gelfand, A. E., Hills, S. E., Racine-Poon, A., & Smith, A. F. (1990). Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling. *Journal of the American Statistical Association*, 85(412), 972-985.

- Gelfand, A. E., & Smith, A. F. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American statistical association*, 85(410), 398-409.
- Geman, S., & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*(6), 721-741.
- Gilks, W. R., Richardson, S., & Spiegelhalter, D. J. (1996). Introducing markov chain monte carlo. *Markov chain Monte Carlo in practice*, 1, 19.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1), 97-109.
- Jardine, A. K., & Tsang, A. H. (2013). *Maintenance, replacement, and reliability: theory and applications*: CRC press.
- Kabak, I. W. (1969). System availability and some design implications. *Operations Research*, 17(5), 827-837.
- Kececioglu, D. (2003). *Maintainability, availability, and operational readiness engineering handbook* (Vol. 1): DEStech Publications, Inc.
- Kelly, D. L., & Smith, C. L. (2009). Bayesian inference in probabilistic risk assessment—the current state of the art. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(2), 628-643.
- Kourouklis, S. (1994). Estimation in the 2-parameter exponential distribution with prior information. *Reliability, IEEE Transactions on*, 43(3), 446-450.
- Kuo, L., & Yang, T. Y. (2000). Bayesian reliability modeling for masked system lifetime data. *Statistics & probability letters*, 47(3), 229-241.
- Kuo, W., & Wan, R. (2007). Recent advances in optimal reliability allocation *Computational Intelligence in Reliability Engineering* (pp. 1-36): Springer.
- Lai, T. L., & Ying, Z. (1991). Estimating a distribution function with truncated and censored data. *The Annals of Statistics*, 417-442.
- Ma, W. J., Beck, J. M., Latham, P. E., & Pouget, A. (2006). Bayesian inference with probabilistic population codes. *Nature neuroscience*, 9(11), 1432-1438.
- Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (2014). *Statistical methods for reliability data*: John Wiley & Sons.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6), 1087-1092.
- Moon, T. K. (1996). The expectation-maximization algorithm. *Signal processing magazine, IEEE*, 13(6), 47-60.
- Ouali, M.-S., Tadj, L., Yacout, S., & Ait-Kadi, D. (2011). A survey of replacement models with minimal repair *Replacement Models with Minimal Repair* (pp. 3-100): Springer.
- Peng, H., Feng, Q., & Coit, D. W. (2010). Reliability and maintenance modeling for systems subject to multiple dependent competing failure processes. *IIE transactions*, 43(1), 12-22.
- Pham, H., & Wang, H. (1996). Imperfect maintenance. *European Journal of Operational Research*, 94(3), 425-438.
- Robert, C., & Casella, G. (2013). *Monte Carlo statistical methods*: Springer Science & Business Media.
- Roberts, G. O. (1996). Markov chain concepts related to sampling algorithms. *Markov chain Monte Carlo in practice*, 57.
- Wang, H., & Pham, H. (1999). Some maintenance models and availability with imperfect maintenance in production systems. *Annals of Operations Research*, 91, 305-318.
- Wang, H., & Pham, H. (2006). Availability and maintenance of series systems subject to imperfect repair and correlated failure and repair. *European Journal of Operational Research*, 174(3), 1706-1722.
- Zhao, M. (1994). Availability for repairable components and series systems. *Reliability, IEEE Transactions on*, 43(2), 329-334.