

# Traitement numérique de stratégies de remplacements préventifs d'équipements à taux de panne

---

MOHAMED-LARBI REBAIAIA<sup>1</sup>, DAOUD AIT-KADI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE/CIRRELT  
Pavillon Adrien-Pouliot  
1065, av. de la Médecine, local 3515, Université Laval  
Québec (Québec) G1V 0A6, Canada  
mohamed-larbi.rebaiaia@cirrelt.ca

<sup>2</sup> DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
Pavillon Adrien-Pouliot  
1065, av. de la Médecine, local 1314E, Université Laval  
Québec (Québec) G1V 0A6, Canada  
daoud.aitkadi@gmc.ulaval.ca

**Résumé** - Dans cet article, nous reprenons les stratégies de maintenance de type âge et bloc. Nous validerons numériquement les conditions d'existence d'une stratégie optimale finie et unique, pour des distributions de durée de vie à taux de panne croissant. Nous rappellerons les principaux résultats analytiques dans le cas où l'objectif est de minimiser le coût moyen de remplacements préventifs et à la panne. Les résultats publiés dans la littérature sont exclusivement obtenus numériquement. Les outils que nous proposons permettent, une fois les conditions d'existence et d'unicité vérifiées, d'obtenir la périodicité des remplacements préventifs qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Les procédures de calcul peuvent également servir dans le cas où l'objectif est de maximiser la disponibilité de l'équipement.

**Abstract** - In this article, we callback of age and block maintenance strategies. We will validate the conditions of existence of a finite and unique optimal strategy, for lifetime distributions with increasing failure rate. We resume the main analytical results if the objective is to minimize the average cost of preventive replacement and at failure. The results published in the literature are exclusively obtained numerically. The tools that we propose allow, once the condition of existence and uniqueness verified to obtain the periodicity of preventive replacements that minimizes the total average cost per unit time over an infinite horizon. Calculation procedure can also be used in the case where the objective is to maximize the availability of the equipment.

**Mots clés** – Maintenance, stratégies âge et bloc, taux de panne croissant, théorie de renouvellement.

**Keywords** – Maintenance, age and block strategies, increasing failure rate, renewal theory.

---

## 1 INTRODUCTION

Dans les procédés industriels continus, semi-continus ou en série, la défaillance d'une machine ou d'un composant en particulier s'avère dans la plus part des cas problématique pour causer des pertes dans la production et entraîner des coûts considérables. Cependant, l'apparition de défaillances peut être

réduite par des changements de conception et/ou matériels. Toutefois, certaines causes de défaillance subsisteront, du fait que, soit une réduction supplémentaire d'utilisation des machines est nécessaire, soit que la nature même des machines provoqueraient inévitablement ces défaillances et du coup leur indisponibilité. Pour éviter les longues durées d'indisponibilité des ressources de production, la maintenance s'avère être un

compromis très bénéfique à l'entreprise. De ce fait, une entreprise qui possède un plan de maintenance qui est régulièrement mis-à-jour est une entreprise responsable, efficiente et prospère, du moins qui engendre des plus-values.

Il existe dans la pratique plusieurs classes de maintenance aussi appelées techniques ou stratégies et différents types de tâches de maintenance caractérisées par leurs conditions d'activation et leurs objectifs. Selon la norme européenne (NF EN 13306 : octobre 2010), la « Terminologie de la maintenance », la maintenance est définie comme étant l'ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise. Cette norme définit aussi les différentes classes de maintenance qui sont d'ordre préventif, correctif, systématique, conditionnel et prévisionnel ou prédictif. En général, ces différentes classes de maintenance se complètent. A titre d'exemple, la maintenance préventive est exécutée à intervalles de temps prédéterminés qui sont des périodes fixes, par contre la maintenance corrective est exécutée uniquement après la détection d'une panne et donc elle est destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir sa fonction. Quelques fois, l'action corrective consiste simplement à remplacer un bien défaillant par un bien neuf ou un bien usagé selon la stratégie adoptée.

Deux stratégies de remplacement préventif dites de base sont essentiellement bien décrites dans la littérature. Elles sont communément appelées stratégie de remplacement de type âge (ARP) et stratégie de type bloc (BRP). Les modèles mathématiques de ces deux stratégies ont été décrits par plusieurs auteurs tels que [Barlow et Proschan, 1965, 1975], [Hanscom et Cléroux, 1975], [Ait-Kadi et al., 1990] et [Nakagawa, 1986]. Pour ces deux stratégies, il s'agit de déterminer la période de remplacement qui permet de minimiser le coût moyen de remplacement préventif sur un horizon infini. Dans le cas de la stratégie BRP, deux modèles peuvent être décrits mathématiquement. Le premier lorsque les intervalles entre les possibilités de remplacement sont les mêmes, et donc, toute unité est remplacée préventivement à des instants spécifiés par  $kT(1, 2, \dots)$ , et le deuxième lorsque les intervalles sont définis par une variable aléatoire. Nous ne retenons dans ce travail que le premier cas. Par contre dans une stratégie ARP, lorsque l'équipement atteint l'âge  $T$  on procède à son remplacement (préventif). Dans tous les cas, si une défaillance survient avant l'âge  $T$ , un remplacement correctif est effectué exactement comme pour le modèle BRP. Dans notre étude, on supposera que les instants de défaillance (panne) arrivent de façon aléatoire, pour suivre des comportements qui peuvent être représentés par des distributions de probabilité (Normale, Lognormal, Weibull, Exponentielle, Gamma, Erlang, etc.). Nous avons retenu pour notre cas la loi Weibull et la loi Gamma par l'entremise de sa sous-famille qu'est la loi d'Erlang [Pham et Lai, 2007], [Berg et Upstein, 1979].

D'un point de vue opératoire et économique, toutes les stratégies de maintenances se valent et par conséquent elles peuvent être évaluées, comparées et choisies selon leur mérite. En général le critère de mérite est essentiellement basé sur le profit et donc, il s'agit de chercher à appliquer la stratégie qui offre le coût de service le plus bas et ceci selon leur convenance. Un autre point aussi important que le choix de la stratégie elle-même et de se positionner sur telle ou telle autre distribution. Ce point a été rapporté dans [Borland et Proschan, 1965], page 47, par "For

what component failure distributions would a replacement policy be beneficial? ". Cette question a reçu plusieurs explications notamment par [Ait-Kadi et al., 1990], [Hanscom et Cléroux, 1975], [Zhao et Nakagawa, 2014], Peut-être l'exemple le plus médiatisé discuté dans la littérature fût le cas du remplacement des lampes d'éclairage dans une rue et qui consistait à procéder au remplacement lampe par lampe en cas de défaillance ou en un seul tas [Campbell, 1941]. La balance dans les dépenses se penche du côté du remplacement par tas, et ceci à cause des frais encourus lors des remplacements qui sont parfois dispendieux du fait que ceci mobilise à chaque intervention une équipe avec toute une infrastructure matérielle. D'autres facteurs pourraient influencer le choix des stratégies. Dans la majorité des cas le problème de remplacement peut être traité par des techniques en lien avec la théorie de renouvellement, c'est le cas par exemple de la stratégie BRP. Lorsqu'on aborde la théorie de renouvellement, un problème épineux surgit, il s'agit du choix de la distribution de probabilité selon les jeux de données prélevés à partir de statistiques, parce que dans la plus part des cas, la détermination de l'expression exacte de la fonction de renouvellement devient utopique, c'est le cas par exemple de la loi de Weibull qui ne peut être obtenue que par les méthodes d'approximation. Nous verrons un peu plus bas dans cet article, un modèle approximant la fonction de renouvellement de la distribution de Weibull [Smith et Leadbetter, 1963]. Dans beaucoup de cas, d'autres stratégies sont choisies parce que les unités se détériorent à mesure qu'elles vieillissent. Il se trouve que la meilleure politique est de remplacer l'unité si son âge dépasse une limite de contrôle, sinon de reporter le remplacement. D'autres stratégies seraient bénéfiques si une politique d'âge est considérée où les remplacements prévus peuvent être effectués à tout moment, ou pour des politiques où les possibilités de remplacement se produisent au hasard ou sont entièrement régulière. En examinant les deux modèles ARP et BRP dans le détail, des règles de remplacement optimal ont été obtenues pour les situations où l'intervalle entre les possibilités de remplacement suit une distribution de Weibull avec des valeurs de paramètres qui changent. Une comparaison des résultats pour les deux modèles ARP et BRP conduit à une "règle d'or" pour déterminer une bonne règle de remplacement.

Pour cela, et pour répondre à la question : quelle est la meilleure stratégie à appliquer dans une politique de maintenance préventive, ce qui corrobore avec les constatations émises et vérifiées par [Borland et Proschan, 1975], nous allons procéder dans ce qui suit à la présentation des modèles ARP et BRP sur le plan mathématique pur, de démontrer qu'elle est la meilleur stratégie et dans quel cas il s'agit de la choisir. Nous avons choisi expressément une distribution du type Weibull, compte-tenu de sa particularité quant à son applicabilité pour représenter la majeure partie des comportements aléatoires des systèmes et leurs composants. L'étude supposera que même pour le cas d'une machine qui comporte plusieurs composants, il est possible de considérer que tout composant est important et que si un quelconque composant se détériore, toute la machine s'arrête.

## 2 STRATEGIE DE MAINTENANCE

Avant de présenter les deux stratégies citées, nous considérons comme il a été décrit dans [Barlow et Proschan, 1965] que dans le cas où l'horizon est infini, une fonction objective appropriée

est définie pour représenter le coût moyen par unité de temps. Elle est exprimée par,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} \quad (1)$$

Aussi, si  $N_1(t)$  représente le nombre de défaillance dans un intervalle de temps  $[0, t]$  et  $N_2(t)$  le nombre de remplacement des unités non-défaillantes, toujours dans cet intervalle de temps, et soit  $c_1$  et  $c_2$  les coûts de remplacement dans les deux cas, et  $E(*)$  l'espérance mathématique, il est possible d'exprimer le coût moyen dans un horizon infini par :

$$C(t) = c_1 E(N_1(t)) + c_2 E(N_2(t)) \quad (2)$$

Ce modèle s'adapte bien aux deux stratégies ARP et BRP. Commençons par énoncer en premier lieu la stratégie de type âge et déterminons la valeur du coût moyen par unité de temps dans un horizon infini. Tel qu'il a été dit dans [Barlow et Proschan, 1965, 1975], [Bhat, 1969], il serait intéressant et utile de comparer les deux stratégies BRP et ARP utilisant dans les deux cas l'intervalle de temps  $T$ . À première vue, il est néanmoins à constater que la stratégie BRP est moins intéressante compte tenu du fait que des remplacements inutiles quelquefois sont effectués malgré que ces unités continuent d'être opérationnelles, contrairement pour le cas de la stratégie ARP. De même que le nombre total de remplacement des unités défaillantes et non défaillantes sont supérieures que celle de l'ARP. Cependant dans le cas où il est constaté que le taux de pannes est croissant (IFR : increasing failure rate) la stratégie BRP est légèrement meilleure [Barlow et Proschan, 1965], [Ait-Kadi et al., 1990]. De façon globale il y aura exactement  $\lceil \frac{t}{T} \rceil$  remplacements dans l'intervalle  $[0, t]$  sous la stratégie BRP, et pas plus que  $\lfloor \frac{t}{T} \rfloor$  remplacement dans la stratégie ARP.

Nous reprenons ici le Théorème 1 suivant qui a été énoncé dans [Barlow et Proschan, 1965] à la page 67, Chapitre 3. Nous laisserons le lecteur de consulter la démonstration de ce théorème.

Si l'on suppose que  $N_A(t)$  et  $N_B(t)$  représentent respectivement le nombre de remplacements dans une stratégie ARP et une stratégie BRP, il sera constaté que  $N_B(t)$  est stochastiquement plus large que  $N_A(t)$ . Ce fait a été cité un peu plus haut et il est présenté sous forme du théorème suivant :

*Théorème 1.*  $P[N_A(t) \geq n] \leq P[N_B(t) \geq n]$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

Dans ce qui suit, nous donnons plus de précisions pour montrer laquelle des stratégies convient le mieux, et dans quelles conditions les utiliser et à quel prix.

### 2.1 Stratégie de type âge

Comme il a déjà été défini, une stratégie de remplacement de type âge (ARP) est appliquée si le remplacement est effectué lorsque qu'une unité tombe en panne ou lorsqu'elle atteint l'âge  $T$ . Cependant, ceci se traduit mathématiquement par l'expression suivante (Équation (3)) ou l'âge critique est  $x$ , et est donnée dans [Barlow et Proschan, 1965, 1975], [Berg, 1979] comme suit,

$$A(x) = \frac{c_1 F(x) + c_2 \bar{F}(x)}{\int_0^x \bar{F}(u) du} \quad (3)$$

avec

$c_1$ : coût du premier remplacement

$c_2$ : coût de remplacement à un âge donné et tel que ( $c_2$  très petit par rapport à  $c_1$ ).

$F(x)$ : fonction de distribution, qui est supposé être continue, et que  $F(0^-) = 0$  et  $F(+\infty) = 1$ .

$\bar{F}(x)$ : fonction de survie dite aussi fonction de fiabilité, elle est définie telle que  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ .

$r(x)$ : taux de panne,  $f(x)$  étant la densité de probabilité et telle que  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  et ou  $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$

La valeur optimale  $A(x^*)$  est obtenue par dérivation de l'équation (3). Puis l'expression résultante est égalisée à zéro. On obtient alors l'équation (4),

$$r(x) \int_0^x \bar{F}(u) du - F(x) = \frac{c_2}{c_1 - c_2} \quad (4)$$

### 2.2 Stratégie de type bloc (BRP)

Dans le modèle BRP, le coût moyen par unité de temps dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  a été discuté par [Barlow et Proschan, 1965], [Berg et Upstein, 1979], [Ait-Kadi et al., 1990].

Reprenons la partie gauche de l'équation (2) et substituons  $\bar{M}(t)$  par  $E(N_1(t))$  ou  $\bar{M}(t)$  est le nombre de remplacements à la panne dans un intervalle de temps  $kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) et  $E(N_2(t))$  par  $\tilde{M}(t)$  qui est le nombre de remplacements préventif à la fin de la période  $T$  et tel que  $\tilde{M}(t)$  vérifie l'équation (5)

$$\tilde{M}(t) = \left\lceil \frac{t}{T} \right\rceil \quad (5)$$

où  $\lceil x \rceil$  représente l'entier positif le plus large possible qui soit inférieur ou égal à  $x$  (Bhat, 1969).

Si l'on supposera que  $c_2 < c_1$ , l'objectif principal étant de minimiser l'équation (6). Pour obtenir une telle valeur, de l'équation (6) on obtient l'équation (11), puisque l'on sait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{\bar{M}(t)}{t}\right) = \frac{M(T)}{T}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{\tilde{M}(t)}{t}\right) = \frac{1}{T}$ . Noter que  $T$  est équivalent à  $T$ . Alors dans un horizon infini, le coût moyen par unité de temps est donné par l'équation (6).

$$B(T) = \frac{c_1 M(T) + c_2}{T} \quad (6)$$

$B(T)$  est une fonction continue pour  $0 < T < \infty$  et tend vers  $\infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Si nous considérons un remplacement uniquement à la panne, il vient que  $B(T)$  aura un minimum dans  $[0, \infty]$ .

Notons que  $M(T)$  représente la fonction de renouvellement, c'est aussi le nombre d'unités remplacées dans l'intervalle  $[0, t]$ . En réalité l'intervalle de temps s'écrit  $[0, T]$  au lieu de  $[0, t]$  parce que la valeur de  $T$  est connue et finie.

La condition nécessaire pour qu'une valeur finie  $T^*$  minimise  $B(T)$  est obtenue selon le raisonnement suivant:

En premier lieu, il s'agit de dériver l'expression (6), le résultat obtenu est égalisé à zéro, nous obtenons alors les expressions (7) et (8),

$$\frac{dB(T)}{dT} = \frac{[c_1M(T) + c_2] - [c_1m(T)]T}{T^2} = 0 \quad (7)$$

$$T^*m(T^*) - M(T^*) = c_2/c_1 \quad (8)$$

et ou  $m(T)$  étant la densité de renouvellement obtenue à partir de  $M(T)$ .

### 3 PRINCIPAUX RESULTATS ANALYTIQUES

#### 3.1 Stratégie de type âge

Nous avons vu dans la section 2, que la résolution analytique est donnée par l'équation (3) et d'après sa forme la solution n'est pas simple à obtenir surtout pour une distribution de Weibull.

Dans ce qui suit, nous retournons à la stratégie ARP à travers l'équation (3) pour énoncer et vérifier certaines conditions d'existence et d'unicité de la solution optimale.

Comme l'équation (4) est dérivée de l'équation (3), prenons le terme de la partie gauche, et posons :

$$\varphi(x) = r(x) \int_0^x \bar{F}(u) du - F(x) \quad (9)$$

et le terme droit par,

$$\vartheta = \frac{c_2}{c_1 - c_2} \quad (10)$$

Si une solution optimale existe, celle-ci correspondra graphiquement à l'intersection de la fonction  $\varphi(x)$  avec le terme  $\vartheta$  qui est une droite horizontale parallèle à l'axe des abscisses. .

Notons que si  $x = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ . Il s'ensuit que si  $\varphi(x)$  est une fonction croissante vers l'infinie, une solution finie et unique existe, et de ce fait, nous avons :

La fonction  $\varphi(x)$  est une fonction croissante si  $\frac{d\varphi(x)}{dx} > 0$ . Cette condition se traduit par

$$r'(x) \int_0^x \bar{F}(u) du + r(x)\bar{F}(x) \geq 0 \quad (11)$$

Comme  $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ , alors (11) est équivalente à (12)

$$r'(x) \int_0^x \bar{F}(u) du + f(x) \geq 0 \quad (12)$$

Par conséquent l'expression (12) est bien vérifiée à la condition que  $r'(x) > 0$  puisque dans tous les cas  $\int_0^x \bar{F}(u) du \geq 0$  et il en est de même pour  $f(x) \geq 0$ . Si  $r'(x) > 0$ , alors on dira que le taux de panne est croissant.

En reprenant l'équation (4), nous pouvons déduire que si  $r'(x)$  est une fonction monotone croissante vers l'infini et pour que la solution  $x^*$  possède une valeur finie, il faut que  $c_1$  soit largement plus grand que  $c_2$  ( $c_1 \gg c_2$ ). A partir de là, si  $\mu$  est la moyenne de la distribution, les conditions aux limites sont comme suit :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) &= \frac{c_1}{\mu} \\ \lim_{x \rightarrow 0} A(x) &= +\infty \end{aligned} \quad (13)$$

D'autres impératifs peuvent avoir un impact sur l'existence d'une solution optimale qui soit finie, c'est le cas du choix des valeurs des coûts unitaires  $c_1$  et  $c_2$ .

Un résultat similaire a été publié dans [Berg, 1979] et qui est représenté par la proposition suivante tirée de ce même article.

*Proposition 1.* Si  $\eta_A(x)$  est une fonction continue croissante par rapport à  $x$ , l'équation (3) possède une solution finie et unique  $x^*$  pourvu que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \eta_A(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \frac{c_1}{\mu} \quad (14)$$

ou

$$\eta_A(x) = (c_1 - c_2)r(x) \quad (15)$$

et  $\eta_A(x)$  le coût marginal d'un remplacement de type âge d'une unité à l'instant d'âge  $x$ .

Pour la preuve donnée à la proposition 1, elle se trouve dans [Berg, 1979] à la page 137.

#### 3.2 Stratégie de type Bloc

À partir de l'équation (8) nous pouvons constater pour qu'une solution minimal existe il faut que

$$B(t^*) = c_1m(t^*) \quad (16)$$

Nous rappelons que  $m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$  représente la densité de renouvellement. Il est à noter que l'équation (16) est facilement prouvable.

Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution sont exactement les mêmes que pour le modèle ARP. De ce fait, nous aurons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_B(t) = \frac{c_1}{\mu} \quad (17)$$

avec  $\eta_B(t) = c_1m(t)$  qui définit défini le coût marginal. De là, nous énonçons la proposition suivante empruntée de l'article de [Berg, 1979].

*Proposition 2.* Si  $\eta_B(t)$  est une fonction continue croissante par rapport à  $x$ , l'équation (6) possède une solution finie et unique  $t^*$  pourvu que (18) soit vérifiée.

$$\frac{c_1}{c_2} < 1 - \frac{1}{2\mu^2} \quad (18)$$

Nous pouvons remarquer que la forme de l'équation (18) trouve son existence dans un théorème publié dans [Smith et Leadbetter, 1963] et consiste à exprimer l'asymptote de la fonction de renouvellement, par l'équation (19). Ce qui veut dire, qu'il nous est possible d'exprimer la fonction de renouvellement par son asymptote moyennant des erreurs.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu} - 1 \quad (19)$$

Et si l'on ramène le terme  $\frac{1}{\mu}$  vers la partie gauche de l'équation (19), on aura l'équation (20),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( M(t) - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{2\mu^2} - 1 \quad (20)$$

#### 4 FONCTIONS DE DISTRIBUTION POUR NOTRE CAS D'ÉTUDE

Deux distributions nous intéressent dans cette étude et toutes les deux présentent les caractéristiques nécessaires pour qu'elles soient connues comme distributions à taux de panne croissant (IFR) selon certaines valeurs de ses paramètres, ce sont les distributions Weibull et Gamma. Elles sont définies comme suit :

##### 4.1 Distribution de probabilité de Weibull

En théorie des probabilités, la loi de Weibull, nommée d'après Waloddi Weibull [Weibull, 1951], est une loi de probabilité continue. Nous utilisons dans notre cas uniquement deux paramètres pour représenter sa densité de probabilité et sa fonction de distribution pour  $x > 0$ , qui sont :

$$\text{Densité de probabilité : } f(x, \beta, \lambda) = \frac{\beta}{\lambda} \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{\beta-1} e^{-(x/\lambda)^\beta}$$

$$\text{Fonction de distribution (répartition) : } F(x, \beta, \lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^\beta}$$

$$\text{Fonction de survie : } \bar{F}(x, \beta, \lambda) = e^{-(x/\lambda)^\beta}$$

avec :  $\beta > 0$  est le paramètre de forme et  $\lambda > 0$  le paramètre d'échelle de la distribution.

Dans tout ce qui suit, on supposera que le paramètre  $\lambda = 1$ .

##### 4.2 Distribution de probabilité Gamma

De la même façon que pour la Loi de Weibull, en théorie des probabilités et en statistique, une loi Gamma est une loi de probabilité de variables aléatoires réelles positives. Elle est caractérisée par deux paramètres qui affectent respectivement la forme et l'échelle de sa représentation graphique qui soient des réels positifs.

$$\text{Densité de probabilité : } x^{k-1} \frac{\exp(-x/\theta)}{\Gamma(k)\theta^k}$$

$$\text{Fonction de distribution (répartition) : } \frac{\gamma(k, x/\theta)}{\Gamma(k)}$$

Avec :  $k > 0$  est le paramètre de forme et  $\theta > 0$  le paramètre d'échelle de la distribution et  $\gamma(*)$  la fonction gamma incomplète inférieure.

Nous considérons dans ce travail une loi d'Erlang d'ordre 2 qui s'apparente à la loi gamma lorsque l'on considère les valeurs du paramètre de forme  $k$  qui soient entiers, ce qui facilitera l'expression de la fonction de renouvellement qui est analytique (exacte) et de ce fait les fonctions caractéristiques de la loi Erlang 2 sont comme suit :

Pour  $k = 2$  et  $\theta = 1$ , la loi Gamma devient une loi d'Erlang d'ordre 2, on dit aussi de rang 2

$$\text{Densité de probabilité : } f(x) = te^{-x}$$

$$\text{Fonction de distribution (répartition) : } F(x) = 1 - e^{-x}(1+x)$$

$$\text{Fonction de survie : } \bar{F}(x) = e^{-x}(1+x)$$

$$\text{Fonction de renouvellement : } M(x) = \frac{1}{4}(e^{-2x} + 2x - 1)$$

$$\text{Densité de renouvellement : } m(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$$

## 5 APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans ce qui suit, nous allons déterminer les périodes optimales ainsi que les valeurs minimales des coûts moyens par unité de temps pour la deux stratégies dans le cas du choix des lois de distribution de Weibull et d'Erlang d'ordre 2.

### 5.1 Stratégie de type âge

Tout d'abord, présentons le Lemme suivant et sa démonstration. Ce Lemme est un peu spécial puisque qu'il utilise la loi de Weibull comme une fonction de distribution.

#### 5.1.1 Cas d'une distribution de Weibull

*Lemme 1.* Pour une distribution de Weibull, l'équation (3) est équivalente à (21).

$$A(x) = \frac{[(c_1 - c_2)(1 - e^{-x^\beta}) + c_2]\beta}{\gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^\beta\right)} \quad (21)$$

*Preuve:*

Après substitution des fonctions de survie et de répartition dans l'équation (3) pour une fonction de Weibull, nous obtenons,

$$A(x) = \frac{(c_1 - c_2)(1 - e^{-x^\beta}) + c_2}{\int_0^x e^{-u^\beta} du} \quad (22)$$

et comme

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-u^\beta} du &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\gamma\left(\frac{1}{\beta}, u^\beta\right)}{\beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \Bigg|_0^x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\gamma\left(\frac{1}{\beta}, u^\beta\right)}{\beta^2 \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \Bigg|_0^x \\ &= \frac{\gamma\left(\frac{1}{\beta}, u^\beta\right)}{\beta} \Bigg|_0^x = \frac{\gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^\beta\right)}{\beta} - \frac{\gamma\left(\frac{1}{\beta}, 0^\beta\right)}{\beta} = \frac{\gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^\beta\right)}{\beta} \end{aligned}$$

Alors, l'équation (22) est équivalente à (21).

Mais, nous savons que le taux de panne est exprimé par  $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \beta x^{\beta-1}$  pour une Weibull, on aura finalement à l'optimum

$$A(x^*) = (c_1 - c_2)r(x^*) = (c_1 - c_2)\beta x^{*(\beta-1)} \quad (23)$$

Et si on égalise les équations (21) et (23) on obtient l'équation (24) et  $x^*$  sera la solution.

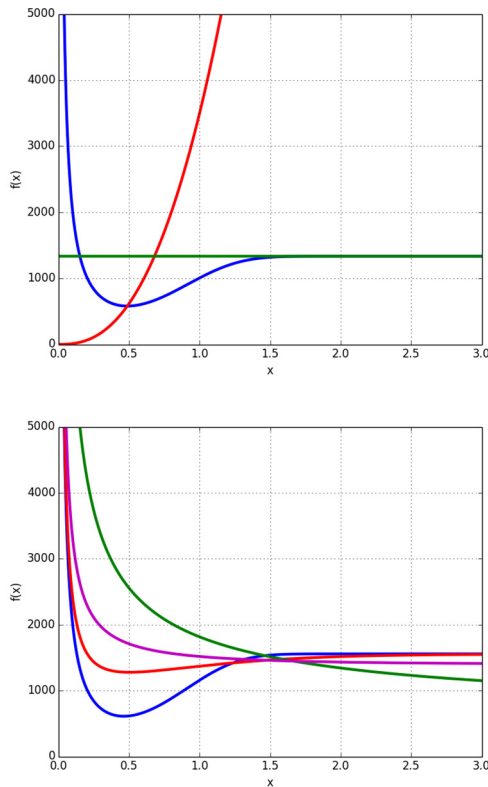
$$e^{-x^{*\beta}} + \gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^{*\beta}\right)x^{*\beta-1} = \frac{c_1}{(c_1 - c_2)} \quad (24)$$

*Preuve:* Égalisons les équations (21) et (23), on aura

$$\begin{aligned} \frac{[(c_1 - c_2)(1 - e^{-x^{*\beta}}) + c_2]\beta}{\gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^{*\beta}\right)} &= (c_1 - c_2)\beta x^{*(\beta-1)} \\ (c_1 - c_2)(1 - e^{-x^{*\beta}}) + c_2 &= (c_1 - c_2)\gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^{*\beta}\right)x^{*(\beta-1)} \end{aligned}$$

#### 5.1.1.1 Application

Si  $c_1 = 1200$  et  $c_2 = 200$  et comme  $\frac{c_1}{c_1 - c_2} = 1.2$ , la valeur optimale  $x^*$  pour différentes valeurs de Beta ( $\beta = 0.5, 1.5, 3.5$ ) est affichée dans la table 1.



**Figure 1. Stratégie ARP. Coût de remplacement optimal définie dans le graphique par (courbe bleu), Coût marginal (rouge) [Berg, 1979], et  $A(\infty)$  (fonctions : (Figure 1- haut)). La fonction  $A(x)$  pour  $c_1 = \$1200$  et  $c_2 = \$200$ , et pour  $\beta = 0.5$  (courbe verte);  $\beta = 1$  (magenta);  $\beta = 1.5$  (rouge);  $\beta = 3.5$  (bleu) (fonctions : Pour la Figure 1, en bas). Avec sur le graphique  $A(x) = f(x)$ .**

**Table 1: Solution de l'équation (8) pour des valeurs de  $\beta = (0.5, 1.5, 3.5)$**

$x^*$ $\beta = 0.5$	Eq: (8)	$x^*$ $\beta = 1.5$	Eq: (8)	$x^*$ $\beta = 3.5$	Eq: (8)
0.00001	0.99842	0.1	1.01571	0.1	1.00079
0.00002	0.99776	0.2	1.04393	0.2	1.00894
0.00003	0.99726	0.3	1.07954	0.3	1.03691
0.00004	0.99684	0.4	1.12041	0.4	1.10074
0.00005	0.99647	0.5	1.16514	0.5	1.21883
0.00006	0.99613	0.6	1.21270	0.6	1.41074
0.00007	0.99582	0.7	1.26230	0.7	1.69573
0.00008	0.99554	0.8	1.31331	0.8	2.09124
0.00009	0.99527	0.9	1.36520	0.9	2.61147
0.0001	0.99501	1.0	1.41756	1.0	3.26646

Il est à remarquer que lorsque  $\beta = 0.5$  la valeur minimale de  $x^*$  atteint l'infini, mais pour  $\beta = 1.5$  et  $\beta = 3.5$ , les valeurs minimales sont respectivement  $x^* \cong 0.6$  and  $x^* \cong 0.5$ , et les coûts moyens sont respectivement de  $A(x^*) = \$1161,89$  et  $A(x^*) = \$618,72$ . Aussi, nous constatons qu'à une différence

près, aux points 0.57 et 0.513 pour  $\beta = (1.5, 3.5)$  nous auront des valeurs encore plus petites  $A(0.57) = \$1136,21$ ,  $A(0.513) = \$581,69$ . Ceci est dû aux marges d'erreurs de la précision.

### 5.1.2 Cas d'une distribution d'Erlang 2

Nous substituons présentement les composantes de l'équation (3) par celles de la loi Erlang 2, le coût moyen par unité de temps pour une stratégie ARP est

$$A(x) = \frac{c_1(1 - e^{-x}(1+x)) + c_2 e^{-x}(1+x)}{2 - e^{-x}(2+x)} \quad (25)$$

#### 5.1.2.1 Application

**Table 2. Solution de l'équation (3) pour des valeurs de  $k = 2, \theta = 1$  pour une loi d'Erlang d'ordre 2**

$x$	$c_1 = 1200,$ $c_2 = 200$	$c_1 = 1100,$ $c_2 = 100$	$c_1 = 1000,$ $c_2 = 250$
0.15	1406.1335	737.1381	1723.5956
0.3	800.14129	462.4381	937.8090
0.45	629.1280	400.7189	700.2550
0.6	561.6945	387.2018	595.7636
0.75	532.6145	389.9595	542.1159
0.9	520.7609	398.9505	512.3811
1.05	517.4577	410.2409	495.3101
1.2	518.6101	422.1017	485.4661
1.35	522.1050	433.7302	479.9534
1.5	526.7852	444.7537	477.1203
1.65	531.9924	455.0112	475.9756
1.8	537.3440	464.4505	475.9015
1.95	542.6161	473.0759	476.5023
2.1	547.6796	480.9208	477.5186
2.25	552.4633	488.0325	478.7782
2.4	556.9316	494.4644	480.1658
2.55	561.0714	500.2710	481.6038
2.7	564.8835	505.5058	483.0403
2.85	568.3773	510.2194	484.4410

Les résultats des calculs itératifs sont donnés dans la table 2.

Remarquons qu'à l'optimum nous avons :

Lorsque  $c_1 = 1200, c_2 = 200, x^* = 1.05$  et le coût moyen par unité est  $A(x^*) = 517.46$

Lorsque  $c_1 = 1100, c_2 = 100, x^* = 0.6$  et le coût moyen par unité est  $A(x^*) = 387.20$

Lorsque  $c_1 = 1000, c_2 = 250, x^* = 1.8$  et le coût moyen par unité est  $A(x^*) = 475.90$

### 5.2 Stratégie de type bloc

#### 5.2.1 Cas d'une distribution de Weibull

Il est connu que pour une distribution de Weibull, la fonction de densité et celle de renouvellement sont difficilement interprétables analytiquement et seule l'approximation peut leur donner une forme mathématique. Dans notre cas nous avons

choisi les expressions  $m(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k T^{*k\beta-1}}{\Gamma(k\beta)}$  et  $M(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k T^{*k\beta}}{\Gamma(k\beta+1)}$  [Smith et Whitehead, 1963], [Rebaiaia et al., 2015(a)], [Rebaiaia et al., 2015(b)], [Mohan Chaudhry et al., 2013] et donc l'expression (8) après substitution de ces dernières expressions est changée en (26),

$$T^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k T^{*k\beta-1}}{\Gamma(k\beta)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k T^{*k\beta}}{\Gamma(k\beta+1)} = c_2/c_1 \quad (26)$$

Comme  $\Gamma(k\beta+1) = k\beta\Gamma(k\beta)$ , l'équation (26) est changée en (27).

Notez que  $\Gamma(k\beta+1)$  est la valeur donnée par la fonction gamma au point  $k\beta+1$ . Si le terme  $k\beta+1$  était entier on aurait utilisé la correspondance  $\Gamma(k\beta+1) = k\beta!$  Qui est la factorielle.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k T^{*k\beta}}{\Gamma(k\beta+1)} [k\beta-1] = c_2/c_1 \quad (27)$$

Pour des valeur finies de  $\beta$  et  $k$ , l'équation (27) est résolue numériquement par application de la procédure de [Smith et Whitehead, 1963], pour calculer les valeurs de  $M(x)$  et  $m(x)$ . Cette procédure a été codée dans MatLab.

Pour illustrer la stratégie BRP nous résolvons numériquement le problème cité dans [Barlow et Proschan, 1965], [Hanscom et Cléroux, 1975]. La distribution de la durée de vie est choisie par analogie avec les travaux de [Berg and Cleroux 1982] et consiste à représenter le comportement stochastique d'un tube (cathodique) dans un équipement de communication. Dans ce problème les coûts unitaires sont proportionnels à  $c_1 = (1200, 1100, 1000)$  et  $c_2 = (200, 100, 250)$ . La valeur  $c_2/c_1 = 200/1200 = 1/6 = 0.16666$  par exemple doit correspondre approximativement à la solution générée par l'équation (15). Il en sera de même pour les rapports  $(100/1100, 250/1000)$ .

La Figure 2 représente la forme de l'équation (27) qui nous donne les coûts moyens par unité de temps pour un composent. Nous pouvons voir que les trois courbes tendent vers  $\frac{c_1}{\mu}$  lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$  (ceci est vérifié par application de la loi dite "Strong Law of Large Numbers for renewal process" [Ross, 2010], [Cox, 1962], [Rebaiaia et al., 2015(b)]). Nous savons aussi qu'une distribution de Weibull a pour moyenne l'expression  $\mu = \lambda\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$ . A titre d'exemple, si  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 3.5$ , et  $c_1=1200$ , alors  $\lim_{T \rightarrow \infty} B(T) = \frac{1200}{0.8997} = 1333.97$ . Cette dernière valeur s'observe très facilement sur les deux graphiques de la Figure 2.

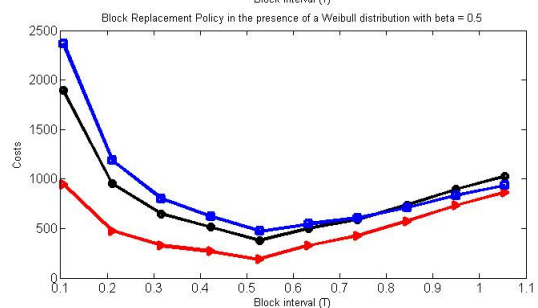
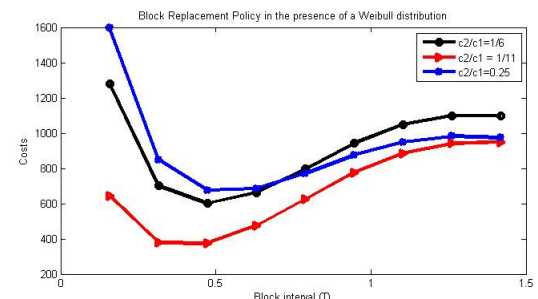
Les résultats de ces calculs sont donnés dans la Table 3. Par conséquent, la valeur minimale du modèle BRP pour chaque scenario est identifiée clairement dans la Figure 2. Par exemple pour  $\beta = 3.5$ , and  $(c_1, c_2)=(1200, 200)$ ,  $B(T^*) = B(0.4725) = 601$ . Ce qui correspond au point d'inflexion de la courbe (noire) à gauche dans la figure 2.

**Table 3: Solution de l'équation (27) donnant la valeur  $T^*$  à chaque itération pour une distribution Weibull.**

$T$	$\beta = 0.5$		
	$m(T)$	$M(T)$	eq: (27)
0.1055	0.0006	0.00001	0.00005
0.2110	0.0099	0.00041	0.00167
0.3165	0.0500	0.00317	0.01265
0.4220	0.1564	0.01329	0.05273
0.5275	0.3717	0.00001	0.15607
0.6330	0.7258	0.09667	0.36276
0.7385	1.1964	0.19739	0.68617
0.8440	1.6614	0.34906	1.05320
0.9495	1.9010	0.54001	1.26501
1.0550	1.7312	0.73545	1.09097

$T$	$\beta = 1.5$		
	$m(T)$	$M(T)$	eq: (27)
0.1	0.4683	0.0314	0.0154
0.2	0.6471	0.0878	0.0416
0.3	0.7698	0.1590	0.0719
0.4	0.8600	0.2407	0.1033
0.5	0.9276	0.3303	0.1335
0.6	0.9784	0.4257	0.1614
0.7	1.0165	0.5255	0.1860
0.8	1.0448	0.6287	0.2072
0.9	1.0655	0.7342	0.2247
1.0	1.0804	0.8416	0.2389

$T$	$\beta = 3.5$		
	$m(T)$	$M(T)$	eq: (27)
0.1575	0.0344	0.0015	0.0038
0.3150	0.1917	0.0173	0.0429
0.4725	0.5016	0.0700	0.1669
0.6300	0.9152	0.1810	0.3955
0.7875	1.2887	0.3563	0.6585
0.9450	1.4457	0.5753	0.7907
1.1025	1.3286	0.7969	0.6679
1.2600	1.0832	0.9871	0.3777
1.4175	0.5948	1.1319	<0
1.5750	<0	0.6003	<0



**Figure 2. Formes des courbes du coût moyen par unité de temps d'une stratégie de type BRP pour une distribution de Weibull avec  $\beta = (3.5$  (haut) et  $\beta = (0.5$  (bas)) lorsque  $c_2/c_1$  est pris dans  $\{1/11, 1/6$  and  $1/4\}$ .**

Nous constatons à partir du tableau 2 que les valeurs de  $T$  qui minimise la fonction économique pour les valeurs de  $\beta=(0.5,1.5,3.5)$  sont  $T^* = (0.5275, 0.6, 0.4725)$  générant des coûts minimaux  $B(T) = (379.17, 1184.73, 601.05)$ .

**5.2.2 Cas d'une distribution d'Erlang**

Reprenons l'équation (6) et substituons l'expression de la fonction de renouvellement de la loi d'Erlang d'ordre 2, nous aurons :

$$B(T) = \frac{c_1 \left( \frac{1}{4} (e^{-2T} + 2T - 1) \right) + c_2}{T} \tag{28}$$

Les calculs pour différentes valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  nous donnent les résultats détaillés dans la table 4.

Notez que l'expression analytique de la fonction de renouvellement l'une distribution Erlang 2, peut facilement être obtenue en utilisant la transformée de Laplace et son inverse (voir par exemple [Rebaiaia et al., 2015 (b)])

**Table 4. Calculs complets fournis par l'application de la stratégie BRP pour une loi d'Erlang 2**

$T$	$c_1 = 1200, c_2 = 200$	$c_1 = 1100, c_2 = 100$	$c_1 = 1000, c_2 = 250$
0.15	1414.96	741.50	1734.69
0.3	815.47	469.74	957.34
0.45	648.82	409.57	725.87
0.6	583.93	396.38	625.49
0.75	555.91	398.48	574.37
0.9	543.98	406.06	545.91
1.05	539.74	415.40	529.15
1.2	539.34	424.95	518.89
1.35	540.86	434.06	512.44
1.5	543.29	442.46	508.29
1.65	546.09	450.08	505.58
1.8	548.99	456.95	503.79
1.95	551.83	463.11	502.59
2.1	554.52	468.63	501.78
2.25	557.03	473.57	501.23
2.4	559.36	478.02	500.85
2.55	561.50	482.03	500.59
2.7	563.46	485.64	500.41
2.85	565.26	488.91	500.29

**6 ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE LES STRATÉGIES DE REMPLACEMENT ARP ET BRP EN PRÉSENCE DE DISTRIBUTION DE TYPE WEIBULL ET ERLANG 2**

Nous dressons dans les deux tables 5 et 6 les valeurs relatives des coûts moyens par unité de temps pour chacune des stratégies ARP et BRP sous trois scénarios différents et ceci dans le cas de l'utilisation des distributions de Weibull et Erlang 2. Dans la table 7, nous présentons l'ordre de préférence entre ces deux stratégies sous les conditions citées juste avant.

Nous pouvons constater que la stratégie ARP est substantiellement meilleure que la stratégie BRP pour une distribution d'Erlang d'ordre 2. Par contre à partir de la Table 7, nous voyons clairement que la stratégie BRP est meilleure pour que l'ARP pour la distribution de Weibull avec  $\beta = 2$  est presque égale pour  $\beta = 1.5$  et  $\beta = 3.5$ .

**Table 5. Application de la stratégie ARP pour les distributions de Weibull et Erlang 2**

Scénario	Weibull			Erlang 2
	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.$	$\beta = 3.5$	$k = 2$
$c_1 = 1200, c_2 = 200$	1184.73	1337.82	601.05	517.46
$c_1 = 1100, c_2 = 100$	911.92	1223.61	374.6	387.20
$c_1 = 1000, c_2 = 250$	1091.40	1117.44	677.25	475.90

**Table 6. Application de la stratégie BRP pour les distributions de Weibull et Erlang 2**

Scénario	Weibull			Erlang 2
	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.$	$\beta = 3.5$	$k = 2$
$c_1 = 1200, c_2 = 200$	1184.7	953.91	603.52	539.35
$c_1 = 1100, c_2 = 100$	912.01	653.72	359.21	396.38
$c_1 = 1000, c_2 = 250$	1091.1	952.54	669.60	500.00 (lim +∞)

**Table 7. Comparaison entre les stratégies ARP et BRP**

Scénario	ARP version Weibull		
	$\beta = 1.5$	$\beta = 1.5$	$\beta = 3.5$
I	ARP $\cong$ BRP	ARP > BRP	ARP $\cong$ BRP
II	ARP $\cong$ BRP	ARP > BRP	ARP $\dashv$ BRP
III	ARP $\cong$ BRP	ARP > BRP	ARP $\dashv$ BRP

Notez que les opérateurs  $\cong, \dashv$  signifient respectivement équivalent et inférieur approximativement.

**7 CONCLUSION**

Nous avons repris dans cet article deux stratégies de remplacement préventif de base qui permettent de déterminer le coût minimal moyen de remplacement à l'âge et à la panne pour



la première stratégie et à la fin d'une période connue et à la panne pour la deuxième. Nous sommes parti du Théorème 1, énoncé dans ce travail pour vérifier laquelle des deux stratégies est préférable sur le plan économique. Pour vérifier ceci, nous avons été emmené à parcourir les fondements théoriques de ces deux stratégies et vérifier l'existence d'une solution et son unicité mathématiquement. Ensuite, nous avons proposé un modèle de calcul pour déterminer les solutions optimales de deux manières, la première mathématique et la deuxième itérative. Une fois les solutions obtenues, nous avons dressé un tableau qui identifie l'ordre de préférence selon les valeurs optimales des coûts minimaux relatives aux deux modèles en choisissant deux distributions de probabilités qui sont proches de la réalité. C'est ainsi que trois scénarios ont été proposés (coûts/distributions) pour vérifier le Théorème 1 sur le plan pratique. Nous avons remarqué que les deux modèles sont approximativement équivalents sauf lorsque la valeur du paramètre de forme  $\beta = 2$ , ce qui ne contredit en rien la véracité de ce théorème.

## 8 REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement les organismes subventionnaires et entre autres, Bombardier aéronautique, Bell Hélicoptères, et le CRSNG.

## 9 REFERENCES

- Ait-Kadi, Baucaire C., Cléroux R., A Periodic maintenance model with used equipment and random minimal repair, *Naval Research Logistics*, Vol. 37, (1990), pp. 855-865.
- Ait-Kadi, D., Jamali M. A., Artina A., Optimal periodic replacement strategies using used items, *Journal of Decision systems*, vol. 12, N0. 1, (2002), pp. 67-77.
- Barlow, R. E., F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability. John Wiley and Sons*, New York, (1965).
- Barlow R.E, F Proshan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*Holt, Rinehart & Winston, New York (1975).
- Berg M, Cléroux R., The Block replacement problem with minimal repair and random repair costs, *J. Statist. Comput, Simul*, (1982), N0. 15, pp. 1-7.
- Berg M, B Epstein, A note on a modified block replacement policy for units with increasing marginal running costs, *Naval Research Logistics*, 26 (1979), pp. 157-160.
- Bhat, B. R., Used item replacement policy, *Journal of applied probability*, vol.6, (1969), pp. 309-3018.
- Campbell, N. R.; The Replacement of Perishable Members of a Continually Operating System, *J. Roy. Statist. Soc.*, 7, (1941), pp. 110-130.
- Chang C.C., S.H. Sheu, Y.L. Chen, A bivariate optimal replacement policy for a system with age-dependent minimal repair and cumulative repair-cost limit, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 42 (22) (2013), pp. 4108-4126.
- Cox, D. R., *Renewal Theory*, Methuen, London, (1962).
- Hanscom M, Cléroux, R, The block replacement problems, *Journal of statistical computation and simulation*, 3, pp. 233-248, (1975).
- McConalogue, D. J. 1976. Algorithm 102: Convolution Integrals Involving Probability Distribution Functions. *Computer J*, 21 no. 3, 270-272
- Mohan L. Chaudhry, Xiaofeng Yang, Boon Ong, Computing the Distribution Function of the Number of Renewals, *American Journal of Operations Research*, 2013, 3, 380-386.
- Nakagawa T, Periodic and sequential preventive maintenance policies, *Journal of Applied Probability*, 23 (2) (1986), pp. 536-542
- Nakagawa T., Zhao X., Comparisons of replacement policies with constant and random times, *Journal of operations Research society of Japan*, vol. 56, N0 1, (2013), pp. 1-14.
- Pham H, Lai C-D, On Recent Generalizations of the Weibull Distribution, *IEEE Transactions on reliability*, vol. 56, NO. 3, 2007, p. 454-458.
- Rebaiaia, M.-L, Ait-kadi, D., Rahimi, S.A., Jamshidi, A. 3rd International Conference on *Control, Engineering & Information Technology* (2015), DOI: 10.1109/ CEIT.2015. 7233173.
- Rebaiaia M.L, D. Ait-Kadi, M.A. Jamali, and C. Mascle, Modified Periodic Replacement with used items at stochastic failure: Focusing sustainability and profit advantages, *Safety and Reliability of Complex Engineered Systems*, CRC Press Taylor & Francis Group (2015), ISBN: 978-1-138-02879-
- Ross S. M., *Introduction to Probability Models*, (10th edition), Ed. Elsevier, (2010).
- Smith, W. L., M. R. Leadbetter.. On the Renewal Function for the Weibull Distribution, *Technometrics*, 5 no. 3, (1963), 393-396.
- Weibull, W. (1951), A statistical distribution function of wide applicability, *J. Appl. Mech.-Trans. ASME* 18 (3), pp. 293-297.
- Zhao X. and T. Nakagawa, Comparisons of Periodic and Random Replacement Policies, *Applied Reliability Engineering and Risk Analysis: Probabilistic Models and Statistical Inference*, First Edition, John Wiley & Sons, 2014, pp. 193-2.