

Calcul de la probabilité de ruine:

Cas de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia.

Lydia TLILANE, Hanane ALLAOUA, Zina BENOURET and Djamil AISSANI
 Unité de recherche LaMOS, Université de Bejaia, Algérie
 Email: *benouaret_z@yahoo.fr*
<http://www.lamos.org>

Abstract—The objective of this work is to evaluate the ruin probabilities within finite and infinite time of the RC automobile in the SAA 3201 agency of Bejaia. In order to identify the corresponding risk model and calculate these characteristics, we lean on the stochastic approach and the results of the ruin theory with an adjustment of the collected data. Furthermore, a simulation study is realized in order to estimate the ruin probability in finite time for this line of business.

Keywords—Insurance, Risk models, ruin probabilities, Adjustment tests, Simulation.

Résumé - L'objectif de ce travail est d'évaluer la probabilité de ruine en temps fini et infini de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia indépendamment des autres branches. Afin d'identifier le modèle de risque correspondant et de calculer ces caractéristiques, nous nous appuyons sur l'approche stochastique et les résultats de la théorie de la ruine avec un ajustement des données collectées. De plus, nous réalisons une approche de simulation pour estimer la probabilité de ruine en temps fini de cette branche d'activité.

Mots clés - Assurance, Modèles de risque, Probabilité de ruine, tests d'ajustement, Simulation.



1 INTRODUCTION:

L'opération d'assurance a pour effet le transfert total ou partiel des conséquences financières du risque subi par l'assuré vers une société d'assurance. Les dépenses prises en charge par la société peuvent correspondre soit à des indemnités à verser à des tiers au titre de la responsabilité (civile, professionnelle, ou autre) de l'assuré, soit à la réparation des dommages subis par ce dernier. Mais qu'advient-il de ces compagnies d'assurance lorsqu'elles courent elles-mêmes un risque?

En assurance, on qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payés, devienne négative à un certain temps. A ce moment là, on dit que la ruine apparaît, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

La théorie mathématique de l'assurance peut contribuer à promouvoir le développement de méthodes plus rationnelles dans la gestion des risques. Les responsables et décideurs dans les compagnies d'assurance seraient ainsi mieux à même d'intégrer dans leurs démarches le fait que le risque, bien quantifié et apprécié, constitue aussi, sinon d'avantage, une opportunité d'innovation, une source de création de richesse, donc de progrès pour nos sociétés.

L'un des outils les plus puissants pour comprendre l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance est la modélisation stochastique. L'équilibre à long terme des résultats de la compagnie d'assurance correspond à la notion mathématique de probabilité de ruine. Le concept de probabilité de ruine sera basé sur les modèles de risque qui relèvent de la théorie du risque.

Nous serons amenés à considérer une compagnie d'assurance qui veut investir une certaine somme d'argent dans une branche d'assurance. Le modèle consiste à la représentation du niveau des réserves comme étant le résultat de la différence entre les recettes par primes chargées et les paiements dus aux sinistres enregistrés en tenant compte d'un capital initial. Le modèle de risque, unidimensionnel, composé d'une seule branche d'assurance, est un modèle utilisé pour décrire ce mécanisme d'arrivée des sinistres et des montants des réclamations. Le modèle concerne l'assurance non-vie, c'est-à-dire, les assurances « dommages » ou « accidents » par opposition aux assurances vie qui présentent d'autres problèmes et relèvent d'une autre modélisation.

L'objectif de ce travail est de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance et d'évaluer sa probabilité de ruine, c'est-à-dire, la probabilité que les dommages à payer aux assurés dépassent les cotisations. La société algérienne d'assurance SAA a pris conscience de l'ampleur de ce problème, c'est pourquoi, nous envisageons d'évaluer la probabilité de ruine de la branche RC (Responsabilité Civile) automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia en fonction du capital initial investi.

A travers cette étude, nous tenterons d'apporter quelques éléments de réponses aux interrogations posées. Ainsi, notre méthodologie de travail fait appel à une recherche bibliographique sur le thème d'une part, une collecte de données auprès de l'agence SAA 3201 de Bejaia d'autre part et enfin, l'application des résultats de la théorie du risque et de la ruine à la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia.

2 MODÉLISATION DE LA RÉSERVE DE LA BRANCHE RC AUTOMOBILE DE L'AGENCE SAA 3201 DE BEJAIA:

Le résultat d'une compagnie d'assurance à la fin de chaque exercice dépend de la réalisation de nombreuses activités. Dans ce travail, nous allons considérer l'activité provenant du côté purement assurance. C'est ainsi que le modèle sera réduit à la représentation du niveau des réserves comme étant le résultat de la différence entre les recettes par primes chargées et les paiements dus aux sinistres enregistrés. Cette étape concerne alors la modélisation de la réserve et de ses paramètres, à savoir, la prime, le nombre et le montant des réclamations des sinistres.

Le processus décrivant l'évolution d'un portefeuille d'assurance est défini comme suit: la société d'assurance dispose d'un capital initial u pour démarrer son activité. Un volume de primes Π est perçu chaque année par la compagnie. En contrepartie de ces primes, la compagnie doit dédommager des sinistres qui surviennent aléatoirement au cours du temps à des instants $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Les montants de ces sinistres sont Z_1, Z_2, \dots . Le résultat $X(t)$ de la branche d'activité à l'instant t est donné par

$$X(t) = u + \Pi(t) - R(t) = u + \Pi(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

qui représente la réserve de la branche considérée.

Nous nous intéressons à la détermination du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

2.1 Modèle de risque classique:

Le modèle de risque de Cramér-Lundberg ou P/G, désigné aussi sous le nom du modèle de risque classique ou encore Poisson composé, a été introduit en 1903 par l'actuaire Suédois Filip Lundberg (cf. [11]) et est connu comme la base du fondement de la théorie du risque.

La notation P/G, empruntée de la théorie des files d'attente, fournit l'information au sujet des lois des arrivées et des montants des réclamations des sinistres. La lettre G signifie général et P signifie Poisson (cf. [9]). Il s'ensuit que la suite $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des arrivées des réclamations forme un processus de Poisson ce qui est équivalent à dire que les temps des inter-occurrences $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $n \geq 1$ sont de distribution exponentielle.

Ce modèle est construit selon les hypothèses suivantes:

- Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamations est un processus de Poisson d'intensité λ .
- La séquence $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ des montants des réclamations est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne finie μ .
- La prime est proportionnelle au temps, c'est-à-dire, $\Pi(t) = ct$ où $c > 0$ est le taux de prime constant choisi de telle sorte que la société ait de bonnes chances de survie.
- Pour tout $t > 0$ et $n \geq 1$, on suppose que la variable aléatoire $N(t)$ et le vecteur aléatoire (Z_1, \dots, Z_n) sont indépendants.

Le processus de Poisson composé modélise la réserve $\{X(t), t \geq 0\}$ avec

$$X(t) = u + ct - R(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ est le montant cumulé des réclamations à l'instant t .

Le processus de risque est donné par

$$\{S(t) = ct - R(t), t \geq 0\}.$$

De plus,

$$\mathbf{E}[ct - R(t)] = ct - \mathbf{E}[N(t)]\mu = ct - \lambda t\mu = (c - \lambda\mu)t = \theta t,$$

où θ est le chargement de sécurité.

Cas particulier: Modèle de Lundberg ou P/P

Un cas particulier du modèle de risque classique est le modèle de Lundberg appelé aussi modèle P/P. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est-à-dire,

$$F_Z(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}y}, \quad y \geq 0,$$

où F_Z est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z qui génère le montant des réclamations.

2.2 Collecte des données:

Afin de modéliser la réserve de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia et de calculer sa probabilité de ruine, une collecte de données s'est déroulée dans cette agence. Les données recueillies sont représentées sous forme de rapports mensuels (bordereaux). La période d'étude s'étale sur trois ans, du 01/01/2007 au 31/12/2009. Les informations qui nous intéressent dans ces données sont:

2.2.1 La réserve initiale

Nous considérons la réserve initiale $u \geq 0$ de la branche RC automobile du 31 décembre 2006.

2.2.2 Le nombre de réclamations (processus de comptage des réclamations)

Lors d'une réclamation d'un assuré, l'indemnisation n'est pas immédiate. La durée d'attente de cette indemnisation est aléatoire. Elle peut être de quelques jours, de quelques mois ou encore de plusieurs années. Dans certains cas, le sinistre peut ne jamais être indemnisé s'il manque par exemple des éléments dans son dossier de réclamation.

En général, dans la théorie du risque, cette attente est négligée et on suppose que la date de réclamation du sinistre correspond à la date de son indemnisation. Dans notre cas, nous ne considérerons pas la date de réclamation du sinistre mais la date de son indemnisation, car, l'intérêt de l'étude porte sur la modélisation de la réserve, qui est fonction des instants de recettes et de dépenses, de plus, la ruine peut apparaître aux instants d'indemnisation uniquement. Dans ce qui suit, nous gardons l'appellation "réclamation" afin de respecter la notation actuarielle.

On associe au nombre de réclamations le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ qui, à chaque instant t , fait correspondre le nombre $N(t)$ de réclamations qui se sont produites dans l'intervalle $]0, t]$. Le temps t se compte en mois en raison de la nature des données qui sont des résultats mensuels. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamations vérifie pour tout $t, h \geq 0$:

- $N(0) = 0,$
- $N(t) \in \mathbf{N},$
- $N(t) \leq N(t+h).$

De plus, $N(t+h) - N(t)$ représente le nombre de réclamations dans l'intervalle $]t, t+h]$.

Nous avons relevé un échantillon de 36 observations, correspondant aux 36 mois de la période d'étude.

2.2.3 Le montant des réclamations (indemnisation) des sinistres

Soit $Z_n > 0$ le montant de la $n^{\text{ème}}$ réclamation. La séquence $\{Z_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées de même fonction de répartition F_Z . L'indépendance des montants des réclamations se caractérise naturellement, car le montant d'une réclamation est une estimation des dégâts causés par le sinistre qui n'influe aucunement sur les montants des autres réclamations.

Notons Z la variable aléatoire qui représente le montant des réclamations. Nous avons relevé un échantillon de 116 montants de réclamations.

2.2.4 Le nombre de primes reçues (processus de comptage des primes)

Il s'agit du nombre de primes reçues par la branche RC automobile pour chaque mois t . Le processus $\{N'(t), t \geq 0\}$ du nombre de primes reçues vérifie pour tout $t, h \geq 0$:

- $N'(0) = 0,$
- $N'(t) \in \mathbf{N},$
- $N'(t) \leq N'(t+h).$

Ainsi, le processus $\{N'(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage.

Nous avons relevé un échantillon de 36 observations, correspondant aux 36 mois de la période d'étude.

2.2.5 Le montant des primes

Soit c_i le montant de la $i^{\text{ème}}$ prime reçue. Dans le cas où on suppose que la prime est constante, les recettes reçues par la compagnie jusqu'à l'instant t sont donc égales à $\Pi(t) = ct$ où c est le taux de prime constant par unité de temps. Dans notre cas, l'unité de temps est le mois, c est alors le taux de prime mensuel qui sera estimé.

2.3 Ajustement des données:

Cette étape consiste à ajuster nos données sur: le nombre de réclamations, le montant des réclamations et la prime par des lois statistiques connues. L'estimation des paramètres des lois et l'ajustement des données sont effectués à l'aide du logiciel libre R.

2.3.1 Ajustement des données du nombre de réclamations

Des données sur les arrivées ou les inter-arrivées des réclamations nous auraient permis de conclure si le processus du comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson. Seulement, les seules données accessibles sont le nombre de réclamations pour chaque mois.

Le théorème 1 fournit une condition nécessaire sur le processus de Poisson. Nous allons vérifier cette condition.

Théorème 1: (cf. [8])

Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt .

Proof: Cf. [8]. \square

Considérons le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamations sur $]0, t]$ qui prend comme valeurs l'échantillon observé durant les 36 mois de la période d'étude. La démarche consiste à supposer que l'échantillon de $N(t)$ obéisse à la loi de Poisson. L'estimation du paramètre λt de la loi de Poisson a été réalisée par la méthode du MLE. Le modèle est validé grâce au test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 1.

Loi ajustée	n	$\hat{\lambda}t$	D_n	$d_{n,\alpha}$	Décision
Poisson	36	1016.055	0.186	0.216	Validé

TABLE 1

Ajustement des données du nombre de réclamations par la loi de Poisson.

où n : Taille de l'échantillon,

$\hat{\lambda}t$: Estimateur du paramètre λt de la loi de Poisson,

D_n : Statistique empirique du test de Kolmogorov-Smirnov,

$d_{n,\alpha}$: Quantile tabulé du test de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 0.05$.

Les résultats obtenus montrent que pour le nombre de réclamations $N(t)$, le modèle de Poisson de paramètre $\lambda t = 1016.055$, est accepté avec un niveau de signification $\alpha = 5\%$.

Pour déterminer λ il suffit de prendre un grand t et de calculer $N(t)/t$. Ainsi, $\lambda = N(36)/36 = 2303/36 = 63.972$ qui correspond aussi au nombre moyen de réclamations par mois.

La condition nécessaire du processus de Poisson étant vérifiée, nous allons vérifier la condition suffisante du théorème 2.

Théorème 2: (cf. [12])

Un processus de comptage homogène, à accroissement indépendants et pour lequel la conclusion du théorème 1 est valable, est un processus de Poisson.

Proof: Cf. [12]. \square

Nous avons constaté durant notre stage au niveau de l'agence SAA 3201 que:

- 1) Le nombre de réclamations (indemnisations) sur une durée (intervalle) de temps dépend de la longueur de cette durée de temps uniquement, plus l'intervalle est grand, plus il y'aura d'indemnisations et l'inverse aussi. De plus, ce nombre ne dépend aucunement de la position de l'intervalle sur l'axe du temps du fait que les indemnisations se déroulent avec la même fréquence durant toute l'année. Nous pouvons alors déduire que le nombre de réclamations $N(t)$ est homogène dans le temps.
- 2) L'hypothèse d'indépendance des accroissements de $N(t)$ est naturelle. En effet, pour $t = \overline{1,36}$, les variables aléatoires $N(t+1) - N(t)$ sont indépendantes, c'est-à-dire que le nombre d'indemnisations durant un mois est indépendant du nombre d'indemnisations des autres mois. Ceci est valable pour tout autre intervalle de temps.

Ainsi, en vertu du théorème 2, nous pouvons conclure que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson.

2.3.2 Ajustement des données du montant des réclamations

Le modèle choisi pour le montant des réclamations est la loi exponentielle afin d'obtenir le modèle de Lundberg (P/P). L'estimation du paramètre δ de la loi exponentielle a été réalisée par la méthode du MLE en utilisant le logiciel R. Le modèle est validé par le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 2. où $\hat{\delta}$ est l'estimateur du

Loi ajustée	n	$\hat{\delta}$	D_n	$d_{n,\alpha}$	Décision
Exponentielle	116	9.421×10^{-5}	0.080	0.120	Validé

TABLE 2

Modélisation du montant des réclamations par la loi exponentielle.

paramètre δ de la loi exponentielle.

Ainsi, le montant des réclamations est de distribution exponentielle de paramètre $\delta = 9.421 \times 10^{-5}$.

La fonction de répartition F_Z du montant des réclamations est alors

$$F_Z(t) = 1 - \exp(-9.421 \times 10^{-5}t).$$

La fonction de survie du montant des réclamations donnée par

$$\overline{F}_Z(t) = 1 - F_Z(t) = \exp(-9.421 \times 10^{-5}t)$$

décroit exponentiellement en fonction de t . Ce qui signifie que la queue de la distribution de F_Z est légère qui permet d'obtenir des solutions quantitatives simples de la probabilité de ruine.

2.3.3 Ajustement du montant des primes reçues

Puisque l'estimation de la probabilité de ruine d'un modèle de risque avec une prime variable est très compliquée, nous allons ajuster le montant des primes afin d'avoir un taux de prime constant. L'unité de temps est le mois, nous allons alors ajuster la prime à un taux mensuel constant. Ainsi, nous considérons le montant total des primes reçues pour chaque mois.

Soit C la variable aléatoire représentant le total des primes reçues chaque mois. Nous obtenons un échantillon de 36 observations en sommant pour chaque mois de la période d'étude, toutes les primes récoltées durant ce mois.

Nous allons maintenant tester l'hypothèse que C suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) afin d'estimer le taux de prime mensuel c par l'estimateur MLE de la moyenne m de la loi normale et d'utiliser les tests gaussiens pour la validation de cet estimateur.

L'estimation des paramètres m et σ^2 a été réalisée par la méthode du MLE en utilisant le logiciel R. Le modèle est validé grâce au test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 3. L'ajustement des primes à une loi normale est validé. Nous exploitons ce résultat pour utiliser les tests gaussiens pour tester la validité de l'estimateur du taux de prime c qui n'est autre que l'estimateur MLE de la moyenne de la loi normale.

Nous allons tester $H_0 : m = 576402.3$ " contre $H_1 : m \neq 576402.3$ ". Nous utilisons le test de Student sur la moyenne de la loi normale avec un niveau de signification $\alpha = 5\%$. Les

Loi ajustée	n	Paramètres de la loi	D_n	$d_{n,\alpha}$	Décision
Normale	36	$m = 576402.33, \sigma^2 = 183676.33$	0.205	0.216	Validé

TABLE 3

Ajustement du montant total mensuel des primes reçues.

n	Moyenne m	T	$t_{(n-1, \alpha/2)}$	Décision
36	576402.33	0	2.262	Validé

TABLE 4

Résultats du test de Student pour la moyenne des montants mensuels des primes.

résultats obtenus sont représentés dans le tableau 4 suivant: où T : Statistique empirique du test de Student, $t_{n-1, \alpha/2}$: Quantile tabulé du test de Student avec un seuil de signification $\alpha = 0.05$.

L'hypothèse H_0 est acceptée. Finalement,

$$c = m = 576402, 33.$$

Remarque: La variance $\sigma^2 = 183676.33$ est grande, ce qui signifie, théoriquement, que l'échantillon observé a des valeurs dispersées. La valeur élevée de la variance peut être justifiée d'une part, par le fait qu'elle soit non significative devant les primes encaissées qui, rappelons-le, sont des totaux mensuels. D'autre part, par l'augmentation de 20% du tarif de l'assurance RC automobile entrée en vigueur en janvier 2008. Cette augmentation a été étalée sur deux ans, à raison de 5% tous les six mois, ce qui correspond à notre période d'étude. Les assureurs avaient justifié l'augmentation par le déficit énorme enregistré par les compagnies d'assurances sur cette garantie.

2.4 Indépendance entre le nombre et le montant des réclamations:

Le but de cette partie est de vérifier l'indépendance entre $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Étudier l'indépendance entre le nombre et le montant des réclamations revient à étudier la corrélation entre ces deux variables. Une mesure de la corrélation est obtenue par le calcul du coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson que nous estimons avec le logiciel R.

L'indépendance se caractérise lorsque le coefficient de corrélation ρ est nul. Afin de vérifier ceci, nous appliquons le test de corrélation de Pearson qui teste l'hypothèse $H_0 : \rho = 0$ contre $H_1 : \rho \neq 0$. Autrement dit, le test de Pearson teste l'indépendance entre le nombre et le montant des réclamations.

Les résultats sont représentés dans le tableau 5.

n	$\hat{\rho}$	t	$t_{(\alpha, n-2)}$	Décision
36	-0.199	-1.1876	1.697	Validé

TABLE 5

Résultats du test d'indépendance de Pearson.

où $\hat{\rho}$: Estimateur de Pearson du coefficient de corrélation entre le nombre et le montant des réclamations,

t : Statistique empirique du test de Pearson,

$t_{(\alpha, n-2)}$: Quantile tabulé du test de Student avec un seuil de signification $\alpha = 0.05$.

L'hypothèse H_0 est acceptée, c'est-à-dire, $\rho = 0$. D'où, les processus $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants (indépendance linéaire).

Remarque: Réellement, il existe une certaine dépendance entre le nombre et le montant des réclamations. D'ailleurs, lorsqu'on estime le coefficient de corrélation, on trouve que $\hat{\rho} = -0.19$. La modélisation de cette dépendance nécessite l'introduction des fonctions dites fonctions copules (cf. [7]). Ainsi, afin de simplifier notre étude, nous négligeons la faible dépendance entre le nombre et le montant des réclamations et nous supposons l'indépendance que nous venons de vérifier par le test de Pearson.

2.5 Modèle de risque de la branche RC automobile:

2.5.1 Cas où la prime est constante

L'analyse des données a révélé que le processus de comptage du nombre de réclamations $\{N(t), t = 1, \dots, 36\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ , ce qui nous mène au modèle de risque classique. De plus, le montant des réclamations est de distribution exponentielle de paramètre δ . Nous pouvons alors conclure, lorsque la prime est constante, que le modèle de risque obtenu est le cas particulier du modèle de risque classique appelé modèle de Lundberg ou le modèle P/P.

La réserve de la branche RC automobile à l'instant t est par conséquent

$$X(t) = u + ct - R(t), \quad \text{où } R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0.$$

2.5.2 Cas où la prime est variable

Lorsqu'on suppose que la prime est variable, la réserve prend la forme suivante:

$$X(t) = u + \Pi(t) - R(t), \quad \text{où } R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0,$$

et $\{\Pi(t), t \geq 0\}$ est le processus des primes tel que

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{N'(t)} c_i,$$

où $\{N'(t), t = 1, \dots, 36\}$ est le processus de comptage des primes reçues et c_i le montant de la $i^{\text{ème}}$ prime reçue.

2.5.3 Comparaison entre les deux cas

L'évolution de la réserve durant la période d'étude selon les deux modélisations précédentes est représentée dans le graphe 1. La représentation graphique de la réserve de la branche RC automobile révèle que les deux courbes représentant la réserve selon que la prime soit constante ou variable sont pratiquement pareilles dans les deux cas. De plus, l'instant de ruine, c'est-à-dire, le moment où la réserve devient négative est le même pour les deux courbes. Nous pouvons alors supposer que la prime est constante. Ainsi, le modèle de Lundberg représente bien l'évolution de la réserve de cette branche d'assurance.

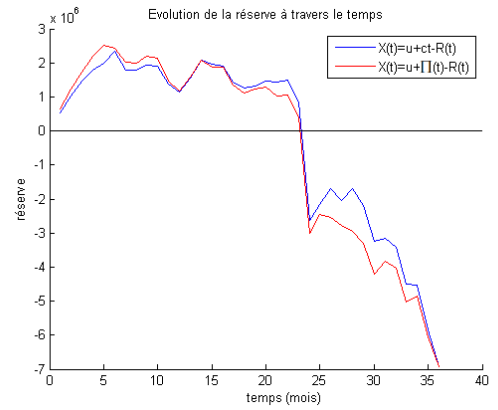


Fig. 1. Évolution de la réserve de la branche RC automobile.

3 PROBABILITÉ DE RUINE DE LA BRANCHE RC AUTOMOBILE:

Dans ce qui suit, nous allons évaluer la probabilité de ruine pour le modèle de risque obtenu, qui n'est autre que le modèle de Lundberg (P/P).

3.1 Présentation:

Considérons le processus de réserve $\{X(t), t \geq 0\}$ de la compagnie d'assurance où

$$X(t) = u + ct - R(t),$$

c est le taux de prime constant par unité de temps, $R(t)$ est le montant cumulé des réclamations jusqu'à l'instant t et u est la réserve initiale.

Définissons la variable aléatoire

$$\tau(u) = \inf_{t \geq 0} \{X(t) < 0 / X(0) = u\}.$$

$\tau(u)$ représente l'instant où le processus de réserve devient négatif, sachant que la réserve initiale est u . Autrement dit, $\tau(u)$ est l'instant de ruine du portefeuille d'assurance.

On appelle probabilité de ruine à horizon fini T , la fonction

$$\psi(u, T) = \mathbf{P}[\inf_{0 \leq t \leq T} \{X(t) < 0 / X(0) = u\}] = \mathbf{P}[\tau(u) \leq T].$$

En temps infini, elle est définie par

$$\psi(u, \infty) = \psi(u) = \mathbf{P}[\inf_{t \geq 0} \{X(t) < 0 / X(0) = u\}] = \mathbf{P}[\tau(u) < \infty].$$

3.2 Chargement de sécurité:

On appelle chargement ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\theta = c - \lambda\mu.$$

Le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnités payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété

suivante:

Propriété du coefficient de sécurité

- Si $\theta > 0$, cela garantit, d'après la loi forte des grands nombres, que le processus de réserve tend presque sûrement vers $+\infty$ et que $\psi(u) < 1$. L'activité est dite dans ce cas "rentable".
- Si $\theta \leq 0$, alors $X(t)$ tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers l'infini et par conséquent $\psi(u)=1$.

Proof: Cf. [1]. \square

De façon évidente, la compagnie doit s'assurer que $\theta > 0$. Sous cette hypothèse, nous pouvons quantifier la probabilité de ruine, autrement, la ruine sera certaine.

Dans le cas de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia, nous avons:

$c = 576402.33$ DA: taux de prime mensuel,

$\lambda = 63.972$: moyenne mensuelle du nombre de réclamations,

$\mu = 10614.32$ DA: montant moyen des réclamations.

Ainsi

$$\theta = c - \lambda\mu = 576402.33 - 63.972 \times 10614.32 = -102616.949 < 0.$$

Nous constatons que $\theta < 0$, c'est-à-dire que la prime est plus petite que le montant moyen des réclamations que la compagnie d'assurance paye pour ses assurés. Ainsi, la condition nécessaire n'est pas vérifiée. Ce résultat signifie qu'à partir d'un certain temps, la branche RC automobile sera ruinée avec une probabilité égale à 1. Finalement, la probabilité de ruine de la branche RC automobile à horizon infini est

$$\psi(u) = 1, \quad u \geq 0.$$

Pour $u = 102677.17$ DA, l'instant de la ruine de la branche RC automobile déduit graphiquement (cf. figure 1) est $\tau(102677.17) = 24$ qui correspond au 24^{ème} mois de la période d'étude, c'est-à-dire que la ruine de la branche RC automobile apparaît à partir de décembre 2008.

Le problème de ruine survient au niveau du chargement de sécurité θ qui est négatif. En observant l'expression $\theta = c - \lambda\mu$, nous remarquons que l'actuaire peut influencer uniquement sur le taux de prime c pour que θ devienne positif. Effectivement, il n'est pas possible de varier le nombre moyen ou le montant moyen des réclamations en raison de leur aspect aléatoire. Cependant, varier le paramètre c ne veut pas forcément dire attribuer une nouvelle tarification de la prime RC automobile, car comme nous l'avons mentionné auparavant, le taux de prime c est une moyenne du montant de la prime globale que la compagnie reçoit chaque mois et non une prime individuelle (qui concerne un seul client).

Ainsi, afin de vérifier la condition nécessaire sur le chargement de sécurité, le taux de prime c doit satisfaire la condition

$$c > \lambda\mu,$$

où $\lambda = 63.972$ et $\mu = 10614.32$, c'est-à-dire,

$$c > 679019.279.$$

Notons \tilde{c} la nouvelle valeur de c pour laquelle la condition $c > \lambda\mu$ est vérifiée. La prime \tilde{c} peut être écrite comme suit:

$$\tilde{c} = (1 + \tilde{\theta})\lambda\mu, \quad \tilde{\theta} > 0,$$

où $\tilde{\theta}$ est le chargement de sécurité relatif. Ainsi, pour de nouvelles valeurs de la prime c obtenues en donnant à $\tilde{\theta}$ différentes

valeurs positives, la positivité du chargement de sécurité est vérifiée, d'où la ruine de la branche RC automobile n'est plus certaine en vertu de la condition suffisante sur le chargement de sécurité. Nous pouvons alors calculer sa probabilité de ruine.

3.3 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini:

Le théorème 3 fournit une expression de la probabilité de ruine à horizon infini $\psi(u)$ dans le cas du modèle de risque classique.

Théorème 3: (cf. [14])

Pour tout $u \geq 0$,

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u) \quad (2)$$

où $\overline{(F_Z^s)^{*n}} = 1 - (F_Z^s)^{*n}$ et $(F_Z^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de (F_Z^s) tel que

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_Z(y)) dy, \quad x \geq 0.$$

Proof: Cf. [14] \square

Application au modèle de Lundberg (P/P)

En utilisant la formule (2), nous allons déduire l'expression exacte de $\psi(u)$ pour le modèle de risque de Lundberg (P/P).

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u), \quad \rho = \lambda/(\delta c).$$

Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre δ , nous avons

$$F_Z(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\delta u} & , u \geq 0; \\ 0 & , u < 0. \end{cases}$$

Calculons

$$F_Z^s(u) = \delta \int_0^u (1 - F_Z(y)) dy, \quad x \geq 0.$$

$$F_Z^s(u) = \delta \int_0^u e^{-\delta y} dy = \delta \left(\frac{-1}{\delta}\right) [e^{-\delta y}]_0^u = 1 - e^{-\delta u}.$$

Ainsi,

$$F_Z^s(u) = F_Z(u), \quad u \in \mathbf{R}.$$

$(F_Z^s)^{*n}$ représente la $n^{\text{ème}}$ convolution de F_Z^s . Puisque nous avons l'indépendance des n variables aléatoires $Z_i, i = \overline{1, n}$, de distribution commune $Exp(\delta)$ et que $F_Z^s = F_Z$, alors $(F_Z^s)^{*n}$ est la fonction de répartition de la somme des n variables aléatoires $Z_i, i = 1, \dots, n$.

Nous utiliserons les transformées de Laplace afin de déterminer $(F_Z^s)^{*n}$.

$$\widehat{L}_{(F_Z^s)^{*n}}(x) = [\widehat{L}_{(F_Z)}(x)]^n, \text{ ou encore } \widehat{L}_{(f_Z)^{*n}}(x) = [\widehat{L}_{(f_Z)}(x)]^n,$$

où f_Z est la densité de probabilité des montants des réclamations $Z_i, i = 1, \dots, n$. Ainsi,

$$\widehat{L}_{(f_Z)}(x) = \int_0^{\infty} f_Z(t) e^{-xt} dt = \int_0^{\infty} \delta e^{-(\delta+x)t} dt = \frac{\delta}{\delta+x}.$$

D'où,

$$\widehat{L}_{(f_Z)^{*n}}(x) = \left[\frac{\delta}{\delta+x}\right]^n.$$

En se référant aux tables des transformées de Laplace (cf. [13]), nous trouvons que

$$(f_Z)^{*n}(x) = \frac{\delta(\delta x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\delta x}, \quad x \geq 0$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang(δ, n) dont la fonction de répartition est donnée par

$$(F_Z)^{*n}(x) = (F_Z^s)^{*n}(x) = \frac{\Gamma(n, \delta x)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\delta x} (\delta x)^k}{k!}.$$

Ce résultat signifie que la somme de n variables aléatoires indépendantes de distributions exponentielle de même paramètre δ est une loi d'Erlang(δ, n). Alors,

$$\overline{(F_Z^s)^{*n}}(x) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\delta x} (\delta x)^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\delta u} (\delta u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) e^{-\delta u} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) e^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1-\rho) e^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho} \\ &= \rho e^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho \delta u)^k}{k!} = \rho e^{-\delta u} e^{\rho \delta u} = \rho e^{-(\delta-\lambda/c)u}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\delta} e^{-(\delta-\lambda/c)u}. \tag{3}$$

Le tableau 6 contient les résultats de la probabilité de ruine à horizon infini $\psi(u)$ de la branche RC automobile selon la formule (3), pour des valeurs de $\theta > 0$ données et pour $c = 576402.33$, $\lambda = 63.972$, $\mu = 10614.32$ et la réserve initiale $u = 102677.17$. Nous constatons à partir des résultats du tableau 6,

θ	\tilde{c}	$\tilde{c} - c$	$\psi(u)$
1/10000	679087.180	102684.850	0.998
1/5000	679155.082	102752.752	0.997
1/1000	679698.298	103295.968	0.989
1/500	680377.317	103974.987	0.978
1/100	685809.471	109407.141	0.899
1/50	692599.664	116197.334	0.811
1/40	695994.761	119592.431	0.770
1/30	701653.255	125250.925	0.708
1/20	712970.242	136567.912	0.600
1/10	746921.206	170518.876	0.377

TABLE 6

Probabilité de ruine en temps infini pour des valeurs positives de θ .

que les différences ($\tilde{c} - c$) sont grandes. Ainsi, pour éviter la ruine certaine de la branche RC automobile, l'actuaire devra augmenter la prime d'une quantité importante. Il faudrait que le taux de prime c dépasse la valeur $\lambda\mu$ représentant le coût moyen des réclamations.

3.4 Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini:

Le théorème 4 fournit un résultat explicite de la probabilité de ruine à horizon fini pour le modèle de Lundberg. Cependant, une intégration numérique est nécessaire (cf. [1]).

Théorème 4: (cf. [14])

Supposons que $F_Z(x) = 1 - e^{-\delta x}$ pour tout $x \geq 0$. Alors

$$\psi(u, T) = \frac{1}{r} e^{-(r-1)r^{-1}\delta u} - e^{-\delta u - (1+r)T} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\delta u, \lambda T, y) dy, \tag{4}$$

où $r = \delta c / \lambda$ et

$$g(w, s, y) = 2\sqrt{r} \frac{e^{(2\sqrt{r}s+w/\sqrt{r}) \cos y}}{1+r-2\sqrt{r} \cos y} (\sin y \sin(y + \frac{w}{\sqrt{r}} \sin y)).$$

Proof: Cf. [14]. □

Lors de l'application numérique, nous avons remarqué que l'intégrale de l'équation (4) diverge pour nos paramètres λ, μ et u .

Nous proposons alors une approche simulation pour calculer la probabilité de ruine à horizon fini $\psi(u, T)$. Le principe consiste à simuler $n = 100$ répétitions indépendantes du processus de réserve jusqu'à ce que la ruine se produise. Dans chaque répétition nous arrêtons le test à T , à moins que la ruine ne se produise avant l'instant T , dans ce cas, nous nous arrêtons à l'instant de ruine. Soit p l'estimateur de $\psi(u, T)$. Nous prenons le rapport $p = n'/n$ où n' est le nombre de fois où la ruine s'est produite avant l'instant T , par rapport au nombre total n de simulations. En répétant l'expérience 50 fois (simulation de Monté Carlo) et en prenant la moyenne des estimateurs p , nous obtenons une estimation de la probabilité de ruine à temps fini $\psi(u, T)$.

Pour différentes valeurs de T correspondant à des mois, nous avons dans le tableau 7 les résultats de la simulation de la probabilité de ruine à horizon fini $\psi(u, T)$ pour les augmentations précédentes du taux de prime c (cf. section 3.3) qui assurent un chargement de sécurité positif et pour $c = 576402.33$, $\lambda = 63.972$, $\mu = 10614.32$ et $u = 102677.17$. Nous constatons

\tilde{c}	$\tilde{c} - c$	$\psi(u, 9)$	$\psi(u, 12)$	$\psi(u, 18)$	$\psi(u, 24)$	$\psi(u, 30)$
576402.33	0	0.999	1	1	1	1
679087.180	102684.850	0.834	0.888	0.942	0.967	0.975
679155.082	102752.752	0.829	0.884	0.939	0.966	0.973
679698.298	103295.968	0.827	0.884	0.935	0.964	0.974
680377.317	103974.987	0.822	0.882	0.932	0.958	0.972
685809.471	109407.141	0.796	0.852	0.908	0.940	0.954
692599.664	116197.334	0.738	0.809	0.866	0.888	0.915
695994.761	119592.431	0.694	0.769	0.833	0.881	0.894
701653.255	125250.925	0.655	0.723	0.787	0.832	0.842
712970.242	136567.912	0.565	0.616	0.676	0.701	0.720
746921.206	170518.876	0.305	0.325	0.327	0.332	0.333

TABLE 7

Simulation de la probabilité de ruine en temps fini pour différentes valeurs de \tilde{c} .

que pour la prime c estimée, la ruine est certaine après le 9^{ème} mois (à partir du 10^{ème} mois). Tandis que pour les différentes

augmentations de la prime c , la ruine n'est plus certaine. De plus, plus T augmente, plus la probabilité de ruine $\psi(u, T)$ augmente. Nous remarquons également que plus c augmente, plus la probabilité de ruine à horizon fini $\psi(u, T)$ diminue. Notons que ces augmentations doivent être raisonnables afin de ne pas perdre de contrats (concurrences entre les compagnies d'assurance).

4 CONCLUSION:

Dans ce travail, nous avons modélisé la réserve de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia et nous avons calculé la probabilité de ruine de cette branche d'assurance en se basant sur les résultats de la théorie du risque.

La modélisation de la réserve nous a permis d'identifier le modèle de risque correspondant à la branche RC automobile qui est le modèle de Lundberg, en supposant l'indépendance entre le nombre et le montant des réclamations et la constance de la prime.

Le développement des résultats de la théorie classique de la ruine au modèle de Lundberg nous a permis d'obtenir une expression exacte de la probabilité de ruine à temps infini. Quant à la probabilité de ruine à temps fini, nous avons présenté des résultats théoriques pour ce modèle particulier.

En se basant sur les résultats de la théorie classique de la ruine dans le cas du modèle de Lundberg, l'application numérique a révélé que la probabilité de ruine de la branche RC automobile était de 1, c'est-à-dire que la ruine est certaine, en raison de la condition nécessaire sur le chargement de sécurité qui n'est pas vérifiée et de la supposition d'indépendance entre la branche étudiée et les autres branches de l'agence.

Une augmentation du taux de prime c éviterait que la branche RC automobile ne soit ruinée. Cependant, cette alternative peut paraître non réalisable d'un point de vue économique. Par ailleurs, une augmentation du nombre d'assurés permettrait l'augmentation du taux de prime c afin de couvrir les réclamations des sinistres. Une autre solution consiste en l'utilisation des techniques de division du risque comme la coassurance et la réassurance.

Puisque le décideur, au sein de la compagnie d'assurance, peut intervenir uniquement sur la valeur de la prime, nous avons calculé, pour plusieurs augmentations du taux de prime c , les probabilités de ruine associées en temps fini et infini.

Notons que pour la probabilité de ruine à horizon fini, même en présence de résultats théoriques, l'application numérique demeure compliquée en raison des expressions complexes de cette probabilité. Il est alors intéressant d'utiliser des méthodes numériques ou des techniques de simulation.

REFERENCES

- [1] S. Asmussen and H. Albrecher. *Ruin probabilities*. World Scientific, 2010.
- [2] Z. Benouaret. *Stabilité dans les modèles de risque*. Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, option Modélisation Mathématique et Techniques de Décision, Université A. Mira de Bejaia, 2012.
- [3] Z. Benouaret and D. Aissani. *Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims*. Scandinavian Actuarial Journal, N.2, 83-93, 2010.
- [4] Z. Benouaret and D. Aissani. *Modèles de risque et files d'attente : La méthode de stabilité forte*. Journal Afrika Statistika, 5, pages 210-218, 2010.
- [5] P. Cizek, W. Härdle, and R. Weron. *Statistical tools for finance and insurance*. Chapter 15, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [6] Actes du Workshop National. *Actuariat et mathématiques financières*. LAMOS Editions, Université de Bejaia, Mai 2009.
- [7] M. Goovaerts, R. Kaas, M. Denuit, and J. Dhaene. *Actuarial Theory for Dependent Risks - Measures, Orders and Models*. Wiley, 2005.
- [8] J. Jacod. *Chaînes de Markov, processus de Poisson et applications*. DEA de probabilités et applications, 2003/2004.
- [9] J. Janssen and R. Manca. *Semi-Markov risk models for finance, insurance and reliability*. Springer, 2007.
- [10] S. Loisel. *Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine*. Cours en ISFA 3^{ème} année, Université de Lyon 1, 2005/2006.
- [11] F. Lundberg. *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen, aterförsäkring av kollektivrisker*. Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.
- [12] A. Rungg. *Processus stochastiques - avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité*. Presses polytechniques romandes, Suisse, 1989.
- [13] J. L. Schiff. *The Laplace transform: Theory and applications*. Springer-Verlag, New York, Inc, 1999.
- [14] V. Schmidt, T. Rolski, J. Teugels, and H. Schmidli. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, 1999.